Propriété (T) de Kazhdan relative à l'espace

Mohamed Bouljihad

Numéro National de Thèse : 2016LYSEN010

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée par

l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Ecole Doctorale Infomaths N°512

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 28 juin 2016, par :

Mohamed BOULJIHAD

Propriété (T) de Kazhdan relative à l'espace

Composition du jury

Directeurs :	BEKKA Bachir	Université de Rennes 1
	GABORIAU Damien	École Normale Supérieure de Lyon
Rapporteurs :	SKANDALIS, Georges	Université Paris Diderot
	VALETTE, Alain	Université de Neuchâtel
Examinateurs :	BEKKA, Bachir	Université de Rennes 1
	GABORIAU, Damien	École Normale Supérieure de Lyon
	HOUDAYER, Cyril	Université Paris Sud
	SKANDALIS, Georges	Université Paris Diderot
	VAES, Stefaan	Université KU Leuven
	VALETTE, Alain	Université de Neuchâtel

Mis en page avec la classe thesul.

Sommaire

Introduction

Chacun est familier avec l'expérience d'évolution dans le temps d'un phénomène : les mouvements des étoiles, des nuages, les fluctuations de la bourse ou des battements du cœur en sont autant de témoin. Ces systèmes évoluant sont des objets de première importance en mathématiques, où ils portent le nom de **systèmes dynamiques**.

Le fameux « effet papillon », qui veut qu'une modification infime de l'état initial d'un système puisse entraîner des comportements totalement différents, indique que, pour de nombreux systèmes, il est impossible en pratique de prédire l'état qu'il aura au bout d'un certain temps. Il n'en est pas moins possible de fournir quelques informations sur le comportement à long terme de tels systèmes dynamiques.

Initiée à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle par Poincaré, l'étude **qualitative** des systèmes dynamiques s'attache à décrire l'évolution en temps long de systèmes plus ou moins complexes, issus de domaines aussi variés que l'astronomie, la météorologie, l'économie, la biologie, etc.

Avant de donner une définition précise de ce qu'est un système dynamique, voici deux exemples permettant d'illustrer la diversité des comportements et des applications possibles.

Le premier provient d'un phénomène observé dans la mer Adriatique après la grande guerre : bien que de nombreux pêcheurs étaient partis combattre, on a remarqué que la population de sardines avait diminué. Pour expliquer ce phénomène, on commence par s'intéresser à l'évolution au cours du temps de deux espèces : les sardines, qui jouent le rôle de proies, et les requins, les prédateurs. On introduit pour cela un système d'équations (différentielles) relativement simple : les équations de Lotka-Volterra (voir par exemple [Mur02]). Dans ce modèle, le nombre de prédateurs augmente tant que les proies sont en nombre suffisant, puis diminue quand il n'y a plus assez de proies. A ce moment, les proies peuvent se reproduire jusqu'à atteindre un certain nombre, permettant aux prédateurs de proliférer à nouveau. Une étude qualitative de ce système montre que l'on obtient une évolution cyclique : on parle de de système dynamique **périodique**.

C'est alors que les pêcheurs entrent en scène en tant que prédateur commun aux deux espèces. L'étude du nouveau système montre que le nombre moyen des sardines augmente alors que la moyenne des requins diminue. Ainsi, l'étude de ce modèle permet d'expliquer le « paradoxe »de la mer Adriatique.

Passons maintenant au second exemple, qui se trouve être bien plus imprévisible. Encore une fois, il s'agit d'un système que l'on trouve dans la nature. Il est composé des trois corps suivant : la planète Saturne et deux de ses satellites, Titan et Hypérion. Bien que les équations décrivant le mouvement de Hypérion soient relativement simples, la dynamique de ces trois corps est telle qu'il n'est pas possible en pratique de prédire le comportement de son axe de rotation : on parle de système **chaotique**.

Ainsi, un système composé de trois objets peut donner lieu à des systèmes aussi bien réguliers, comme le premier exemple périodique, que complexes, chaotiques. Il se trouve d'ailleurs que pour un certain nombre de systèmes, il est impossible en pratique de prédire l'état du système après un temps conséquent. Pourtant, pour une bonne quantité de tels systèmes, la fréquence asymptotique d'occurrence des événements est d'une part bien définie et d'autre part ne dépend essentiellement pas du point de départ du système. Ces propriétés permettent de passer au formalisme mathématique sur lequel se fonde l'étude des systèmes dynamiques. Elles sont à l'origine de ce que l'on appelle la **théorie ergodique**.

L'objet de la théorie ergodique est l'étude d'un système dynamique du point de vue mesuré, i.e. du point de vue de la **théorie de la mesure** [Rud80]. On considère un espace mesuré (X, μ) et une bijection mesurable $T : X \to X$ qui préserve la mesure μ : pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset X$, on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de cette transformation, i.e. aux itérés T^n quand n tend vers l'infini, relativement à la mesure μ.

Pour lier ce formalisme aux exemples précédents, nous pouvons, pour simplifier, voir X comme l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, T comme l'évolution, disons au bout d'un an, d'un état du système à un autre, et enfin μ comme une fonction mesurant la fréquence d'occurrence de certains états du système.

Un exemple simple et intéressant de tel système est donné par une rotation irrationnelle du cercle. Attardons-nous sur celui-ci. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé et $(X, \mu) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \lambda)$ le cercle muni de la mesure de Lebesgue. La transformation T est donnée par $T(x) = x + \theta$ pour tout $x \in X$. On peut montrer que θ est irrationnel si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset X$, la mesure de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(A)$ vaut 0 ou 1.

On dit qu'une transformation est **ergodique** dès que cette propriété est satisfaite : le système dynamique ne peut pas être décomposé en sous-systèmes stricts, et joue ainsi le rôle de « brique de base ». Nous renvoyons le lecteur à [Sil08] pour une invitation à la théorie ergodique. Nous portons à présent notre attention sur la théorie ergodique dans la perspective des actions de groupes sur des espaces de probabilité standards sans atome [1] (X, μ) : on parle de **théorie ergodique des actions de groupes**.

La donnée d'une bijection bimesurable $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ préservant la mesure de probabilité μ engendre une **action** de $\mathbb{Z}$ sur (X, μ) définie par :

$$n \cdot x = T^n(x), \quad \text{pour tous } n \in \mathbb{Z}, x \in X.$$

Supposons maintenant que l'on dispose d'un système plus complexe formé de plusieurs bijections mesurables de (X, μ) préservant la mesure μ. On note ces transformations $(T_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble dénombrable. Pour étudier ce système, il est naturel de regarder comment « s'agencent » ces transformations et donc de s'intéresser au groupe Γ qu'elles engendrent. Suivant l'exemple de $\mathbb{Z}$, on obtient ainsi une action de Γ sur (X, μ) préservant la mesure. On note cette action $\boldsymbol{\Gamma \curvearrowright (X, \mu)}$.

1. e.g. l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue

Considérons par exemple le cas où $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Ce groupe agit naturellement sur $\mathbb{R}^n$ tout en stabilisant le sous-groupe $\mathbb{Z}^n$. On obtient ainsi une action de Γ sur le tore $(\mathbb{T}^n, \lambda) = (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \lambda)$ muni de la mesure de Lebesgue λ, elle-même préservée par l'action de Γ.

Plus généralement, pour tout groupe dénombrable Γ, il existe des actions ergodiques $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ préservant une mesure de probabilité μ. Mieux, nous pouvons construire des actions ergodiques telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$ différent de l'élément neutre, l'ensemble des points fixe soit de mesure nulle : on dit que l'action est (essentiellement) **libre**. Pour de telles actions, l'orbite de presque tout point $x \in X$ est donc une copie de Γ. Par l'étude d'actions libres et ergodiques d'un groupe Γ, nous pouvons donc espérer obtenir des informations sur ce même groupe.

Ainsi, la théorie ergodique des actions de groupes s'intéresse aux propriétés du duo : groupe/action.

La très grande diversité des objets considérés fait que la théorie ergodique des actions de groupes est à l'interface de nombreux domaines : théorie des groupes, théorie des nombres, géométrie, marches aléatoires, algèbres d'opérateurs, etc.

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'interface théorie des groupes/algèbres d'opérateurs. Plus précisément, nous nous focalisons sur une propriété de rigidité[2] des actions de groupes : **la propriété (T) de Kazhdan relative à l'espace**.

La propriété (T) relative à l'espace prolonge au cadre des actions de groupes la propriété (T) relative de certaines paires de groupes. On renvoie le lecteur au Chapitre 1 pour les différentes définitions.

Nous commençons par introduire plus précisément le contexte dans lequel s'inscrit ce manuscrit. Nous présentons ensuite les principaux résultats obtenus dans cette thèse et le contenu des chapitres.

1 Cadre de la thèse

Soient Γ un groupe dénombrable infini et (X, μ) un espace de probabilité standard sans atome. A toute action de Γ sur (X, μ) par bijections biboréliennes préservant la mesure de probabilité (p.m.p.), on associe une algèbre de von Neumann : le produit croisé $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ à travers la célèbre **group measure space construction** de Murray et von Neumann [MVN36].

Si l'action est libre et ergodique, le produit croisé $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ est un **facteur de type II_1** : une algèbre non commutative de dimension infinie. Un problème central de la théorie des algèbres de von Neumann est de classifier ces facteurs à travers les propriétés de Γ ou de son action sur (X, μ).

Murray et von Neumann démontrent dans leur article [MVN36] que les facteurs hyperfinis de type II_1 sont tous isomorphes : ils s'obtiennent par exemple à l'aide d'actions libres ergodiques de $\mathbb{Z}$. On parle ainsi **du facteur hyperfini** de type II_1.

2. Nous entendons par propriété de **rigidité** toute propriété qui permet d'identifier un objet par moins d'informations que ce qui devrait a priori être nécessaire. Un excellent exemple pour illustrer ce propos est « être un polynôme réel de degré n » : il suffit de connaître les valeurs d'un tel polynôme en $n+1$ points pour connaître les valeurs de ce polynôme sur la droite réelle tout entière.

Ils démontrent par ailleurs que les facteurs de type II_1 ne sont pas tous hyperfinis. Pour cela, ils considèrent l'algèbre de von Neumann que l'on associe canoniquement à un groupe : l'algèbre de von Neumann $L(\mathbf{F}_2)$ du groupe libre à deux générateurs $\mathbf{F}_2$ n'est pas hyperfinie.

La question qui se pose alors est de distinguer les facteurs de type II_1 non hyperfinis. Pour ce faire, Murray et von Neumann introduisent le **groupe fondamental** d'un facteur M de type II_1 de trace fidèle τ : il s'agit du sous-groupe $\mathcal{F}(M)$ de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par les $\tau(p)$ où p parcourt les projections de M telles que $M \cong pMp$.

Ils démontrent que le groupe fondamental du facteur de type II_1 associé au groupe des permutations de $\mathbb{N}$ à support fini est $\mathbb{R}_+^*$ [MvN43]. Convaincus qu'il existe des facteurs de groupe fondamental différent de $\mathbb{R}_+^*$, les outils à leur disposition ne leur permettent cependant pas de le prouver.

Il faut attendre une trentaine d'années pour que Connes démontre que des facteurs de type II_1 ont des groupes fondamentaux différents de $\mathbb{R}_+^*$; les algèbres de von Neumann associées à des groupes dénombrables à classes de conjugaison infini ayant la **propriété (T) de Kazhdan** [Con80a]. Connes introduit pour cela la propriété (T) pour les facteurs de type II_1 et démontre que les facteurs possédant cette propriété ont tous un groupe fondamental dénombrable.

Inspiré par les travaux de Connes et par la propriété (T) relative de Kazhdan-Margulis, Popa introduit quelques années plus tard la propriété (T) relative pour des inclusions $B \subset M$ d'algèbres de von Neumann finies dans le cadre de sa théorie de la déformation/rigidité [Pop06a]. Il parvient ainsi à répondre à un certain nombre de questions ouvertes concernant la théorie des algèbres de von Neumann.

Dans le cadre des actions de groupes p.m.p., Popa définit la notion de rigidité, dite **propriété (T) relative à l'espace** : une action p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace si l'inclusion d'algèbres $L^\infty(X, \mu) \subset L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ a la propriété (T) relative.

Considérons l'exemple où Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), n \geqslant 2$ qui agit naturellement par automorphismes sur le tore $X = \mathbb{T}^n$ muni de la mesure de Haar normalisée μ. La propriété (T) relative à l'espace pour cette action équivaut à la propriété (T) relative pour la paire de groupes $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$. Cette paire est d'ailleurs bien étudiée [Bur91].

Popa utilise, entre autres, la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ pour montrer que le groupe fondamental du facteur $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ de type II_1 est réduit à l'élément neutre [Pop06a]. La propriété (T) relative à l'espace est aussi utilisée comme ingrédient-clé pour produire des exemples de facteurs de type II_1 de groupe fondamental prescrit [PV10a, Hou09].

Notons par ailleurs que si d'une part Γ a la propriété (T), et que d'autre part l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace, alors l'algèbre $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a la propriété (T). Cela permet d'obtenir de nouveaux exemples d'algèbres de von Neumann ayant la propriété (T). L'algèbre produit croisé $L^\infty(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})) \rtimes \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est ainsi le premier exemple d'algèbre de von Neumann ayant la propriété (T) qui n'est pas construit comme algèbre de von Neumann d'un groupe dénombrable [IS13].

La propriété (T) relative à l'espace joue un rôle crucial dans l'étude des algèbres de von Neumann mais aussi dans la théorie ergodique des actions de groupes. En effet, on remarque dans les années 1950 que l'algèbre produit croisé $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ ne dépend que de la relation d'équivalence mesurée sur X donnée par sa partition en orbites de Γ [Sin55]. L'étude des actions de groupes à équivalence orbitale près, initiée par Dye dans les années 1950-1960 [Dye59, Dye63], se développe depuis en parallèle avec la théorie des algèbres de von Neumann [FM77a, FM77b].

Soient Γ et Λ des groupes dénombrables agissant sur un espace de probabilité standard (X, μ) en préservant la mesure de probabilité. Nous disposons de plusieurs manières de comparer ces actions.

Les actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ sont **conjuguées** s'il existe un isomorphisme de groupes $\delta : \Gamma \to \Lambda$ et un automorphisme d'espace mesuré $f : (X, \mu) \to (X, \mu)$ qui entrelace les actions : pour tout $\gamma \in \gamma$ et pour presque tout $x \in X$,

$$f(\gamma x) = \delta(\gamma) f(x).$$

Les actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ sont **orbitalement équivalentes** s'il existe un automorphisme d'espace mesuré $f : (X, \mu) \to (X, \mu)$ qui envoie orbite sur orbite à un ensemble négligeable près :

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x), \text{ pour presque tout } x \in X.$$

Les actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ sont **von Neumann équivalentes** si les algèbres de von Neumann produits croisés sont isomorphes :

$$L^\infty(X) \rtimes \Gamma \cong L^\infty(X) \rtimes \Lambda.$$

Notons que les actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ sont orbitalement équivalentes si et seulement si on a un isomorphisme de paires (voir [Sin55, FM77b]) :

$$(L^\infty(X) \subset L^\infty \rtimes \Gamma) \cong (L^\infty(X) \subset L^\infty(X) \rtimes \Lambda).$$

Les implications suivantes sont directement vérifiées

$$\text{conjugaison} \Rightarrow \text{équivalence orbitale} \Rightarrow \text{équivalence de von Neumann.}$$

Qu'en est-il des réciproques ?

On dit qu'une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est **OE-superrigide** si toute action orbitalement équivalente à $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est en fait conjuguée à cette action. De même, on dira que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est **$\mathbf{W}^*$-superrigide** si toute action von Neumann équivalente à $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est en fait conjuguée à cette action.

En ce qui concerne les groupes dénombrables moyennables, Ornstein et Weiss démontrent que les actions ergodiques p.m.p. de ces groupes sont deux à deux orbitalement équivalentes [OW80] : on ne peut donc pas avoir de réciproque à la première implication pour des actions de groupes moyennables.

Pour ce qui est des groupes non-moyennables, la situation est bien différente. En effet, Bezuglyĭ et Golodets exhibent un exemple de groupe non-moyennable admettant une quantité indénombrable d'actions libres ergodiques pmp deux à deux non orbitalement équivalentes [BG81]. Quelques années plus tard, Gaboriau et Popa démontrent que c'est aussi le cas pour les groupes libres, en s'aidant de la propriété (T) relative à l'espace [GP05]. Enfin, la solution mesurable du problème de Day-von Neumann[3] [GL09] permet à Epstein et Ioana de démontrer que tout groupe dénombrable non-moyennable admet une quantité indénombrable d'actions libres ergodiques p.m.p. deux à deux non orbitalement équivalentes [Ioa11a, Eps08]. Ils utilisent pour cela de manière fondamentale la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\mathbf{F}_2 \curvearrowright (\mathbb{T}^2, \mu)$, le groupe $\mathbf{F}_2$ étant vu comme un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut ainsi espérer démontrer des résultats de superrigidité pour des groupes non-moyennables.

Cela est bien le cas, et d'ailleurs, des résultats d'OE-superrigidité et de W*-superrigidté sont obtenus à l'aide de la propriété (T) relative à l'espace de certaines actions de groupes [Pop07, HPV13, Pop06b] ; Ioana montre par exemple que toute action de Bernoulli d'un groupe à classes de conjugaison infinies avec la propriété (T) est W*-superrigide [Ioa11b]. En outre, pour $n \geqslant 3$ et $\Gamma = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z}) *_{T_n} \mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$, où T_n désigne le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$, Popa et Vaes montrent que toute action libre et ergodique de Γ est W*-superrigide [PV10b].

Ces différents résultats soulignent la diversité des applications de la propriété (T) relative à l'espace : étude des facteurs de type II_1, existence d'un continuum d'actions non-orbitalement équivalentes pour les groupes non-moyennables, OE et W*-superrigidité.

Néanmoins, certains aspects théoriques de cette notion restent largement mystérieux. Une question toujours ouverte concerne d'ailleurs l'existence de telles actions pour tous les groupes non-moyennables (voir Problème 5.10.2 [Pop06a]). Nous proposons dans cette thèse d'apporter quelques éclaircissements à ce sujet.

2 Présentation des résultats et contenu des chapitres

Nous nous intéressons aux problèmes suivants :

1. **étudier la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace** par des constructions standards[4] ;

2. **donner un critère pratique** pour qu'une action ait la propriété (T) relative à l'espace ;

3. **construire** des actions p.m.p. libres et ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace pour des groupes discrets non-moyennables.

Notre angle d'attaque repose en partie sur la construction suivante, qui fournit une vaste classe d'actions p.m.p..

Soit G un groupe localement compact et soit Λ un réseau[5] de G. On note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes continus de G et $\mathrm{Aff}(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ le **groupe des transformations**

3. i.e. pour tout groupe dénombrable non-moyennable Γ, il existe des actions libres ergodiques p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\mathbf{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)$ sur un espace de probabilité standard (X, μ) telles que pour presque tout $x \in X$ on ait $\mathbf{F}_2 x \subset \Gamma x$
4. produit, restriction, co-induction, induction
5. Rappelons qu'un réseau est un sous-groupe discret de co-volume fini.

affines de G. On note $\mathrm{Aut}_\Lambda(G)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ formé des $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ tels que $\sigma(\Lambda) = \Lambda$.

Le groupe des transformations affines de G/Λ

$$\mathrm{Aff}_\Lambda(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}_\Lambda(G)$$

agit de manière naturelle sur G/Λ. Soit μ la mesure de probabilité G-invariante sur G/Λ. La mesure de probabilité μ est invariante par tout élément de $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$.

On obtient ainsi une action p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ pour tout sous-groupe dénombrable Γ de $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$. Les exemples que nous considérons dans ce manuscrit s'inscrivent en grande partie dans ce cadre.

2.1 Stabilité de la propriété (T) relative à l'espace

Nous commençons par nous intéresser aux propriétés de stabilité de la propriété (T) relative à l'espace par diverses constructions naturelles.

Parmi les résultats que nous obtenons, celui qui attire le plus notre attention est le suivant. Soit Γ un groupe dénombrable agissant sur un espace de probabilité standard (X, μ) en préservant la mesure. Soit Λ un sous-groupe de Γ. Si l'action restreinte $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace, alors, de manière évidente, il en est de même de $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$. Nous montrons que la réciproque est vérifiée lorsque Λ est un sous-groupe co-moyennable Γ.

Proposition 0.1 (Proposition 2.18)**.** *Soit Γ un groupe dénombrable et soit Λ un sous-groupe co-moyennable.*
Une action préservant la mesure de probabilité $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si l'action restreinte $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace.

Bien que très naturel, ce résultat n'avait pas encore été démontré. Nous utilisons à de multiples reprises cette proposition, notamment dans la démonstration du Théorème 2.32. Cet énoncé soulève d'ailleurs la question suivante, ouverte à notre connaissance.

Question 0.2. *Qu'en est-il des inclusions co-moyennables d'algèbres de von Neumann ? Plus précisément, pour $B \subset M \subset N$ des algèbres de von Neumann telles que $M \subset N$ soit co-moyennable et $B \subset N$ ait la propriété (T) relative, est-ce que $B \subset M$ possède aussi la propriété (T) relative ?*

Par ailleurs, nous étudions la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace d'une action p.m.p. d'un groupe Γ_0 par co-induction à un sur-groupe Γ. Nous démontrons le résultat suivant dont nous ferons grandement usage.

Proposition 0.3 (Proposition 2.20)**.** *Soient $\Gamma_0 \subset \Gamma$ des groupes dénombrables. Soit $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ une action préservant la mesure de probabilité ayant la propriété (T) relative à l'espace. Les assertions suivantes sont équivalentes ;*

(i) l'action co-induite $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace,

(ii) $[\Gamma : \Gamma_0] < \infty$.

Notons qu'une action de Bernoulli de Γ de base (X, μ) correspond à la co-induction de l'action du groupe réduit à l'élément neutre sur cette base, i.e. $\Gamma_0 = \{e\}$, à Γ.

Nous étudions aussi dans la section 2.3 la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace par produit, Proposition 2.15, et par induction, Proposition 2.26.

2.2 Critère de rigidité

De nombreux critères pour qu'une paire de groupes ait la propriété (T) relative ont été obtenus (voir [BdlHV08] pour une monographie sur le sujet). Parmi eux, le critère de Burger obtenu dans le cadre de paires de la forme $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$, où Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, est à l'origine de nombreux développements [Bur91, Sha99, dC06, Fer06]. Burger démontre que la paire $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$ a la propriété (T) relative si et seulement s'il n'existe pas de mesure de probabilité invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ par l'action de ${}^t\Gamma$.

Cette caractérisation de la propriété (T) relative de la paire $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$, qui équivaut à la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$, donne une idée de la direction à suivre pour obtenir une expression purement ergodique de la propriété (T) relative à l'espace.

C'est en s'inspirant de ce résultat que Ioana répond affirmativement à une question soulevée par Popa [Pop] : peut-on donner une caractérisation de la propriété (T) relative à l'espace ne faisant pas intervenir la notion d'algèbre de von Neumann ?

Proposition 0.4 ([Ioa10, IS13]). *Une action préservant la mesure de probabilité $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ d'un groupe dénombrable Γ sur un espace de probabilité standard (X, μ) a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si pour toute suite de mesures de probabilité (ν_n) définies sur $X \times X$ et vérifiant*[6] *:*

1. *$p^i_* \nu_n = \mu$ pour tout n et $i = 1, 2$, où $p^i : X \times X \to X$ est la projection sur la i-ème coordonnée,*
2. *$\int_{X \times X} \varphi(x)\psi(y) d\nu_n(x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \varphi(x)\psi(x) d\mu(x)$, pour toutes fonctions boréliennes bornées φ, ψ de X vers $\mathbb{C}$,*
3. *$||(\gamma \times \gamma)_* \nu_n - \nu_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

on a $\nu_n(\Delta_X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, où Δ_X est la diagonale dans $X \times X$.

A l'aide de ce résultat, Ioana et Shalom obtiennent ensuite une caractérisation assez simple de la propriété (T) relative à l'espace dans le cas d'actions par translations sur des espaces homogènes de groupes algébriques réels.

Théorème 0.5 ([IS13], Théorème D). *Soit G un groupe algébrique réel et Λ un réseau de G. Soit Γ un sous-groupe dénombrable de G, dont on note H l'adhérence de Zariski. Supposons que H n'ait pas de sous-groupe algébrique distingué co-compact propre, ni de morphisme non-trivial à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Soit η une mesure de probabilité sur G/Λ qui est Γ-invariante.*
Si le centre de Γ,ou de manière équivalente de H, dans G est fini, alors l'action par translations de Γ sur $(G/\Lambda, \eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace.
Dans le cas où $\eta = m_{G/\Lambda}$, la réciproque est vérifiée : si l'action $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace, alors le centre de Γ dans G est fini.

Nous nous proposons de préciser et généraliser ce critère à plusieurs titres :
- G est un produit $G = \prod_{p \in S} G_p$ de groupes de Lie p-adiques et réels, où S est un sous-ensemble fini de l'union de $\{\infty\}$ avec l'ensemble des nombres premiers et pour chaque $p \in S$, G_p est un groupe de Lie p-adique, le cas ∞-adique correspondant à un groupe de Lie réel,

6. On munit l'espace des mesures $\mathcal{M}(X)$ de la norme $||\nu|| = \sup_{\phi \in B(X), ||\phi||_\infty = 1} |\nu(\eta)|$ pour tout $\nu \in \mathcal{M}(X)$, où $B(X)$ désigne l'ensemble des fonctions boréliennes bornées.

— Γ est un sous-groupe dénombrable arbitraire du produit des groupes des transformations affines de G_p/Λ_p, où Λ_p est un réseau dans G_p,
— on donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'action $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ ait la propriété (T) relative à l'espace, où $\Lambda = \prod_{p \in S} \Lambda_p$ et μ est le produit des mesures de probabilité G_p invariante sur G_p/Λ_p.

Précisons que l'algèbre de Lie de G

$$\mathfrak{g} := \oplus_{p \in S} \mathfrak{g}_p$$

est la somme directe des algèbres de Lie $\mathfrak{g}_p$ de G_p. Le groupe des transformations affines $\mathrm{Aff}(G_p)$ agit linéairement sur $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$. Cela donne lieu à une action de $\mathrm{Aff}(G_p)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$.

Énonçons maintenant notre résultat, inspiré des travaux de Ioana et Shalom. Il implique notamment que la caractérisation de Burger s'étend à ce cadre.

Théorème 0.6 (Théorème 2.33). *Soit Γ un sous-groupe dénombrable de $\prod_{p \in S} \mathrm{Aff}_{\Lambda_p}(G_p)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace ;
(ii) pour tout $p \in S$, il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_p)$.

Signalons que pour obtenir ce théorème, nous utilisons de manière fondamentale la Proposition 2.18 sur la co-moyennabilité.

Ce résultat nous permet d'exhiber de nouveaux exemples d'actions de groupes p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Nous donnons en outre des critères plus simples dans le cas d'actions p.m.p. par automorphismes sur une large classe de nilvariétés, voir les Théorèmes 4.12 et 4.14.

2.3 Groupes linéaires de type fini non-moyennables

Dans l'article introduisant la propriété (T) relative à l'espace, Popa soulève la question naturelle suivante : quels groupes dénombrables admettent une action p.m.p. libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ? Puisque les actions p.m.p. de groupes moyennables n'ont jamais la propriété (T) relative à l'espace, nous pouvons reformuler cette question ainsi.

Question 0.7. *Est-ce que tout groupe dénombrable non-moyennable admet une action p.m.p. libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ?*

Bien que toujours ouvert, ce problème a reçu quelques éléments de réponse. Gaboriau démontre dans [Gab11], Théorème 1.3, que tout produit libre non trivial et non-moyennable de groupes admet une action libre et ergodique p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace[7]. D'autre part, Ioana prouve dans [Ioa11a], Théorème 4.3, que tout groupe non-moyennable admet une action p.m.p. libre et ergodique vérifiant une forme faible de la propriété (T) relative à l'espace.

Par ailleurs, il découle du Théorème 1.1 dans [Fer06] que tout groupe de type fini Γ pour lequel il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que la fermeture de Zariski de l'image est

7. Il démontre plus présicément que ces groupes admettent un continuum d'actions libres et ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace.

non-moyennable admet une action p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ ayant la propriété (T) relative à l'espace. Notons néanmoins que cette action n'est pas nécessairement libre ou ergodique.

Nous apportons à notre tour un éclaircissement à la question de Popa en construisant de telles actions dans le cadre des groupes linéaires.

Théorème 0.8 (Théorème 3.1)**.** *Tout groupe Γ linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et non-moyennable admet une action ergodique $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ ayant la propriété (T) relative à l'espace.*

Les actions que nous obtenons ne sont pas nécessairement fidèles et ne sont donc pas nécessairement libres. Ceci étant, dans le cas où Γ n'admet pas de sous-groupe distingué propre résoluble, nous sommes capable de produire des actions p.m.p. libres et ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Théorème 0.9 (Théorème 3.2)**.** *Tout groupe Γ linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial admet une action libre ergodique $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ ayant la propriété (T) relative à l'espace.*

Bien que permettant d'élargir la classe des groupes connus admettant une action p.m.p. libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace, la question concernant l'existence de telles actions pour tout groupe linéaire dénombrable non-moyennable reste ouverte. D'ailleurs, les techniques que nous introduisons nous amènent à penser que si nous voulions infirmer la question de Popa dans le cadre linéaire, un contre-exemple à considérer serait le suivant.

Question 0.10. *Soit Γ un réseau de $SL_n(\mathbb{Q}_p)$, $n \geqslant 3$. Est-ce que $\Gamma \times \mathbb{Z}$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ?*

2.4 Contenu des chapitres

Nous commençons par introduire dans le *premier chapitre* les différentes définitions nécessaires à la compréhension de la suite du manuscrit. Nous présentons les notions de propriété (T) relative pour une paire de groupes, ainsi que les notions de théorie des algèbres de von Neumann. Nous nous évertuons à mettre en perspective ces objets afin d'arriver naturellement à la propriété (T) relative à l'espace et à certaines de ses applications. A cette fin, nous donnons des exemples fondamentaux permettant de relier ces différentes notions.

Dans le *second chapitre*, nous étudions plus précisément la propriété (T) relative à l'espace. Nous nous focalisons dans un premier temps sur le cas particulier d'actions $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ p.m.p. par automorphismes sur des tores, où $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. La propriété (T) relative à l'espace de ces actions est équivalente à la propriété (T) relative des paires $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$. Puisque ces paires de groupes sont par ailleurs l'objet de nombreuses études, cela nous permet d'obtenir les premières intuitions sur la propriété (T) relative à l'espace. Nous décrivons ainsi un premier critère pour que ces actions aient la propriété (T) relative à l'espace.

Toujours dans le cadre d'actions p.m.p. sur des tores, nous nous intéressons à une question soulevée par Popa. Est-ce que les actions p.m.p. libres et ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace sont fortement ergodiques ? Ioana et Vaes montrent que ce n'est pas le cas [IV12]. Néanmoins, nous précisons leur réponse et explicitons un lien positif entre propriété (T) relative à l'espace et ergodicité forte.

Puis nous étudions la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace vis-à-vis de constructions standards : produit, restriction, co-induction, induction.

Enfin, nous donnons une caractérisation de la propriété (T) relative à l'espace pour des actions par transformations affines sur des espaces homogènes de groupes de Lie p-adiques. Nous en profitons pour préciser ce critère dans le cas particulier de groupes algébriques réels, et mentionnons les différences avec le cas non-archimédien.

Nous montrons dans le *troisième chapitre* que tout groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial admet une action p.m.p. libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace. Pour cela, nous étudions la structure de ces groupes et montrons dans ce cadre un résultat de *dé-compactification* : ils s'injectent dans un produit de groupes linéaires simples non-compacts sur des corps éventuellement distincts de caractéristique nulle, de sorte que la projection de l'image sur chaque facteur est non-bornée et Zariski-dense.

Puis nous construisons des actions p.m.p. libres et ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace pour certains cas particuliers de groupes ne satisfaisant plus les hypothèses précédentes, i.e. qui ne sont pas à radical résoluble trivial.

Dans le *dernier chapitre*, nous étudions la propriété (T) relative à l'espace d'actions de groupes p.m.p. par automorphismes sur une large de classe de nilvariétés modelées sur des groupes de Lie nilpotent de rang 2. Ces nilvariétés sont obtenues comme quotient N/Λ d'un groupe de Lie nilpotent N de rang 2 défini à l'aide d'un graphe fini, par un réseau Λ de N. Nous commençons par définir ces nilvariétés et étudier leurs groupes d'automorphismes. Nous montrons ensuite que la propriété (T) relative à l'espace de telles actions se lit très simplement via l'action sur le commutateur de l'algèbre de Lie de N. Ceci nous permet d'obtenir de nouveaux exemples d'actions p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Certaines parties des chapitres 2 et 4 se retrouvent dans la publication [Bou15]. Par ailleurs, une partie du chapitre 2 ainsi que le chapitre 3 sont l'objet de la prépublicatoin [Bou16].

Chapitre 1

De la propriété (T) à la propriété (T) relative à l'espace

Dans ce chapitre, nous donnons brièvement les définitions et résultats nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.
Nous rappelons les définitions d'algèbres de von Neumann, de propriété (T) relative pour une paire de groupes ou d'algèbres de von Neumann.

Sommaire

1.1 Propriété (T)

Dans son célèbre article [Kaz67], Kazhdan introduit la notion de propriété (T) pour des groupes localement compacts. Cette propriété, vérifiée notamment par les groupes de Lie simples de rang supérieur, lui permet de montrer que les réseaux de ces mêmes groupes sont de type fini, et que leurs abélianisés sont finis.

Dès lors, elle trouve de nombreux développements dans des domaines aussi variés que la théorie des groupes, la théorie ergodique et les algèbres de von Neumann, pour ne citer que ceux qui nous intéressent plus particulièrement dans ce manuscrit. Nous verrons d'ailleurs dans la section suivante que la propriété (T) s'étend naturellement des groupes aux algèbres de von Neumann de groupes.

Les premiers exemples de groupes non-compacts ayant la propriété (T) sont les groupes spéciaux linéaires $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, pour $n \geqslant 3$. Puisque cette propriété a la particularité d'être héritée par les réseaux, les réseaux de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sont aussi des exemples de groupes dénombrables ayant la propriété (T).

Kazhdan définit cette notion de rigidité en termes de représentations unitaires de groupes : un groupe a la propriété (T) si lorsqu'une représentation unitaire de ce groupe admet des vecteurs presque invariants, alors, elle admet nécessairement des vecteurs invariants non triviaux.

Cette notion peut paraître à première vue assez surprenante, pourtant, elle s'avère très utile en pratique. Voici une première application.

Considérons une action d'un groupe dénombrable Γ sur un espace borélien standard (X, μ) qui préserve la mesure de probabilité (p.m.p.) μ. Cette action est ergodique si et seulement si la représentation unitaire associée sur $L^2(X, \mu) \ominus \mathbb{C}$ n'admet pas de vecteur invariant (voir les Définitions 1.3 et 1.26).

Par ailleurs, le fait que cette action ait un trou spectral (voir Définition 2.7), qui implique en particulier que l'action est fortement ergodique (voir Définition 2.8), s'exprime en disant que cette même représentation n'admet pas de vecteur presque invariant.

Ainsi, une action p.m.p. ergodique d'un groupe ayant la propriété (T) a nécessairement un trou spectral, et est donc fortement ergodique.

Passons maintenant aux définitions. Nous nous restreignons pour cela au cadre des groupes dénombrables.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. On note $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$.

Définition 1.1. *Soit Γ un groupe dénombrable.*
Une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ sur $\mathcal{H}$ est un morphisme de groupes $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Définition 1.2. *Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ. Soit $F \subset \Gamma$ une partie finie. Soit $\varepsilon > 0$.*

Un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est dit $\pi(\Gamma)$-invariant si pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\pi(\gamma)\xi = \xi$.

Un vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}$ est dit (F, ε)-invariant si pour tout $\gamma \in F$,

$$||\pi(\gamma)\xi - \xi|| < \varepsilon.$$

Rappelons maintenant la notion de vecteur presque invariant.

Définition 1.3. *Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ.*

On dit que la représentation π admet des vecteurs presque invariants si pour tout sous-ensemble fini $F \subset \Gamma$, pour tout $\varepsilon > 0$, π admet des vecteurs (F, ε)-invariants.

Nous pouvons aussi mentionner la notion de suite de vecteurs presque invariants.

Définition 1.4. *Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ.*
Soit (ξ_n) une suite de vecteurs unitaires de $\mathcal{H}$. On dit que (ξ_n) est une suite de vecteurs presque invariants si

$$\lim_n ||\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n|| = 0, \quad \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Nous pouvons à présent donner la définition de propriété (T), et plus généralement celle de propriété (T) relative pour une paire de groupes.

Définition 1.5. *Soient Γ un groupe dénombrable et Λ un sous-groupe de Γ.*

On dit que la paire (Γ, Λ) a la propriété (T) relative s'il existe une partie finie $F \subset \Gamma$ et $\varepsilon > 0$ tels que toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ admettant des vecteurs (F, ε)-invariants admet un vecteur $\pi(\Lambda)$-invariant non nul.
En d'autres termes, la paire (Γ, Λ) a la propriété (T) relative si toute représentation unitaire de Γ admettant une suite de vecteurs presque invariants admet un vecteur Λ-invariant non-nul.

On dit que Γ a la propriété (T) si la paire (Γ, Γ) a la propriété (T) relative.

Exemple 1.6.

1. *$(\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^n)$ a la propriété (T) relative pour $n \geqslant 2$;*
2. *$SL_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) pour $n \geqslant 3$;*
3. *les réseaux de groupes de Lie simples de rang supérieur ont la propriété (T).*

Bien qu'elle soit implicite dans l'article original de Kazhdan, c'est Margulis qui introduit quelques années plus tard la notion de propriété (T) relative pour une paire de groupes (G, H) où G est un groupe localement compact et H un sous-groupe de G [Mar82].

Elle est d'ailleurs à l'origine d'une des premières applications hors de la théorie des groupes puisque Margulis utilise la propriété (T) relative de la paire $(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$ pour donner les premiers exemples explicites de graphes expanseurs [Mar73].

Nous pouvons aussi citer la résolution du problème de Ruziewicz pour $\mathbb{S}^{n-1}$, $n \geqslant 5$, à l'aide de la propriété (T) de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, comme exemple supplémentaire d'application de la propriété (T) [Mar80].

Enfin, comme nous l'avons mentionné plus tôt, puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) pour $n \geqslant 3$, les actions p.m.p. ergodiques de ce groupe sur un espace de probabilité standard (X, μ) sont nécessairement fortement ergodiques [Sch81].

Donnons maintenant quelques propriétés remarquables des groupes ayant la propriété (T).

Proposition 1.7. *Soit Γ un groupe dénombrable ayant la propriété (T). Alors Γ a les propriétés suivantes :*

(i) Γ est de type fini ;

(ii) l'abélianisé $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est fini ;

(iii) si Γ est moyennable, alors Γ est fini.

Rappelons qu'un groupe dénombrable est moyennable s'il admet une moyenne Γ-invariante. Autrement dit, on demande qu'il existe une fonction m définie sur les parties de Γ, finiment additive, telle que $m(\Gamma) = 1$ et $m(\gamma.A) = m(A)$ pour toute partie $A \subset \Gamma$ et tout $\gamma \in \Gamma$.

Exemple 1.8. *Les groupes suivants sont moyennables* [8] *:*

1. *les groupes finis ;*
2. *$\mathbb{Z}$, les groupes abéliens et plus généralement les groupes résolubles ;*
3. *les sous-groupes de groupes moyennables sont moyennables.*

Von Neumann introduit la notion de moyennabilité en 1929 [vN29] et affine ainsi notre compréhension du paradoxe de Banach-Tarski qui veut qu'une sphère de l'espace $\mathbb{R}^3$ admette une décomposition paradoxale [9] : ce paradoxe est dû aux propriétés des groupes et non de l'espace (nous renvoyons à [dlH04] pour une introduction à ce sujet).

Dès lors, cette notion fait l'objet de nombreuses recherches.

Parmi les questions restées ouvertes un certain temps, nous pouvons mentionner le problème de Day-von Neumann. Le groupe $\mathbf{F}_2$ n'étant pas moyennable, tout groupe le contenant comme sous-groupe n'est pas moyennable. Qu'en est-il de la réciproque ; est-ce que tout groupe non-moyennable admet $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe ?

Ol'Shanski exhibe un exemple qui démontre que ce n'est pas le cas [Ol'80]. Néanmoins, faisons remarquer (ce qui aura une importance dans cette thèse), que Tits donne une réponse positive dans le cadre des groupes linéaires : un groupe linéaire est non-moyennable si et seulement s'il admet le groupe libre à 2 générateurs $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe [Tit72].

D'autre part, Gaboriau et Lyons apportent une réponse positive à ce problème dans le cadre de la théorie mesurée des groupes : un groupe est non-moyennable s'il admet le groupe libre à 2 générateurs $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe mesurable [GL09].

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [BdlHV08] pour une étude détaillée de la propriété (T) et de certaines de ses applications.

8. Profitons de ces exemples pour signaler que nous utilisons l'axiome du choix tout au long des pages de ce manuscrit.

9. i.e. il existe une partition de la sphère en deux parties que l'on peut couper et rassembler de sorte à former deux sphères identiques à la sphère initiale, à déplacements près.

1.2 Algèbres de von Neumann

Les algèbres de von Neumann sont des algèbres d'opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert possédant une structure très riche. Elles peuvent être définies d'après leur structure topologique, algébrique ou analytique.

Introduites initialement pour fournir un cadre mathématique à la mécanique quantique et généraliser la théorie des représentations unitaires de groupes, la théorie des algèbres de von Neumann s'appliquent à bien d'autres domaines.

Elles constituent une théorie non-commutative de l'intégration puisque les algèbres de von Neumann abéliennes sont toutes isomorphes à un certain $L^\infty(X, \mu)$, où (X, μ) est un espace mesuré.

En outre, nous pouvons mentionner les travaux de Jones qui ont permis de résoudre de nombreux problèmes en théorie des noeuds. Il introduit pour cela un polynôme défini à l'aide d'algèbres de von Neumann [Jon85].

Parmi les propriétés les plus intéressantes que possèdent ces algèbres, se trouve le fait qu'elles contiennent les projections spectrales associées à leurs opérateurs adjoints et qu'elles sont engendrées par ces projections.

Une étude des projections des algèbres de von Neumann permet de distinguer en type les blocs élémentaires des algèbres de von Neumann, les facteurs, et de manière plus générale, les algèbres de von Neumann elles-mêmes.

Néanmoins, une fois cette distinction obtenue, subsiste la question de classifier des facteurs d'un même type. Cette question fait l'objet encore aujourd'hui de nombreuses recherches.

Enfin, et c'est ce qui retiendra notre attention, les algèbres de von Neumann présentent de nombreuses interactions avec la théorie des groupes et plus particulièrement avec la théorie ergodique des actions de groupes ; certaines propriétés de ces actions de groupes nous donnent des informations sur les algèbres de von Neumann associées et réciproquement (voir Proposition 1.28).

Passons maintenant aux définitions et voyons quelques exemples.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. On note $(.,.)$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

Soit $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des applications linéaires bornées $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, munie de la norme uniforme :

$$||T||_\infty = \sup_{||\xi||=1} ||T\xi||.$$

Cette algèbre est munie de l'involution $* : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ de passage à l'adjoint $T \mapsto T^*$, qui en fait une C^*-algèbre, i.e. une algèbre de Banach munie d'une involution liée à la norme par l'identité $||T||^2 = ||T^*T||$.

Rappelons que la topologie *forte* est la topologie la moins fine rendant continues les applications $T \mapsto ||T\xi||$, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.
De même, la topologie *faible* est la topologie la moins fine rendant continues les applications $T \mapsto (T\xi, \eta)$, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Définition 1.9. *Soit $M \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ une sous-$*$-algèbre unitaire.*

On dit que M est une algèbre de von Neumann si M est fermée pour la topologie faible sur $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Exemple 1.10. *1. De manière évidente, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann.*

2. Soit (X, μ) un espace mesuré. Alors $L^\infty(X, \mu)$ est une algèbre de von Neumann, identifiée à une sous-algèbre de $\mathbb{B}(L^2(X, \mu))$ à l'aide des opérateurs de multiplication :

$$\pi : L^\infty(X, \mu) \to \mathbb{B}(L^2(X, \mu))$$
$$f \mapsto (\pi(f) : \xi \mapsto f\xi)$$

Toute algèbre de von Neumann abélienne est d'ailleurs isomorphe à une telle algèbre de von Neumann.

Pour un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$, on note $\mathcal{S}'$ son commutant défini comme l'ensemble des opérateurs commutant avec $\mathcal{S}$, i.e.

$$\mathcal{S}' := \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \, : \, ST = TS \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}\}.$$

De manière évidente, on a $\mathcal{S} \subset (\mathcal{S}')'$. On appelle bicommutant et note $\mathcal{S}''$ le commutant de $\mathcal{S}'$.

Les algèbres de von Neumann ont la particularité d'être égales à leur bicommutant. Mieux, le fameux théorème du bicommutant de von Neumann, dont voici l'énoncé, établit que les algèbres de von Neumann sont exactement les algèbres d'opérateurs qui sont égales à leur bicommutant.

Théorème 1.11 ([MVN36]). *Soit $M \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ une sous-$*$-algèbre unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est fermée pour la topologie faible ;
(ii) M est fermée pour la topologie forte ;
(iii) $M = M''$.

Ainsi, dans le monde des algèbres de von Neumann, une première correspondance s'établit entre propriétés topologiques et algébriques.

Un autre point de vue permet de voir les algèbres de von Neumann plus abstraitement et de se défaire de l'espace ambiant $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Il est donné par un théorème de Sakai [Sak98] qui affirme qu'une algèbre de von Neumann M est précisément une C^*-algèbre admettant un pré-dual M_*, i.e., M est isométriquement isomorphe à l'espace de Banach dual $(M_*)^*$, ce pré-dual étant par ailleurs unique à isomorphisme isométrique près.

Ce point de vue permet de révéler les propriétés analytiques de ces algèbres et laisse deviner, une fois encore, la richesse de ces algèbres.

Nous avons vu que la question concernant la classification des algèbres de von Neumann se pose naturellement. Murray et von Neumann démontrent qu'on peut les classer en quatre familles distinctes. Rappelons que toute algèbre de von Neumann peut s'écrire comme somme directe généralisée (intégrale) de facteurs.

Définition 1.12. *Un facteur est une algèbre de von Neumann M dont le centre est réduit aux multiples de l'identité, i.e.* $\mathcal{Z}(M) := M \cap M' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$.

Exemple 1.13. 1. $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ *est un facteur.*

2. *Les algèbres de von Neumann de groupes à classes de conjugaison infinis sont des facteurs (voir Définition 1.16 pour la définition d'algèbre de von Neumann associée à un groupe).*

L'étude des algèbres de von Neumann peut donc se ramener à l'étude des facteurs, qui eux-mêmes se répartissent en plusieurs familles distinctes.

Théorème 1.14. *Soit M un facteur. M est de l'un des types suivants :*

— *de type* I *s'il est isomorphe à* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ *désignant un espace de Hilbert de dimension finie ou infinie ;*

— *de type* II_1 *s'il possède une unique trace fidèle, i.e. une forme linéaire* τ *définie sur M telle que* $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geqslant 0$ *avec égalité si et seulement si* $x = 0$ *;*

— *de type* II_∞ *s'il s'écrit comme produit tensoriel* $M = N \otimes \mathbb{B}(\mathcal{H})$, *où N est un facteur de type* II_1 *et* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert de dimension infinie ;*

— *de type* III *s'il s'écrit comme produit croisé d'un facteur de type* II *par une action de* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.15. *Les algèbres de von Neumann associées à des actions de groupes permettent d'obtenir des exemples de chacun des facteurs précédents.*

Donnons maintenant quelques exemples qui sont l'objet de ce manuscrit : les algèbres de von Neumann associées à des groupes et à des actions de groupes.

Définition 1.16. *Soit* Γ *un groupe dénombrable. Notons* λ *la représentation régulière définie par :*

$$\begin{aligned} \lambda : \Gamma &\to \mathcal{U}(\ell^2(\Gamma)) \\ \gamma &\mapsto \lambda_\gamma : f(.) \mapsto f(\gamma^{-1}.) \end{aligned}$$

L'algèbre de von Neumann du groupe Γ, *que l'on note* $L(\Gamma)$ *est l'algèbre engendrée par les* $\lambda_\gamma \in \mathbb{B}(\ell^2(\Gamma))$, *i.e.*

$$L(\Gamma) = \{\lambda_\gamma \,:\, \gamma \in \Gamma\}''.$$

Exemple 1.17. *Dans le cas où* $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, *la transformée de Fourier nous donne l'isomorphisme* $L(\mathbb{Z}^n) \cong L^\infty(\mathbb{T}^n, \mu)$, *où* $\mathbb{T}^n$ *désigne le n-tore muni de la mesure de Haar normalisée* μ.

Les questions qui se posent naturellement sont de savoir quelles informations tirer du groupe à partir de son algèbre de von Neumann, et réciproquement. Une question toujours ouverte est d'ailleurs la suivante :

Question 1.18. *Soient* $n, m \geqslant 2$ *des entiers naturels distincts. Notons* $\boldsymbol{F}_n$ *et* $\boldsymbol{F}_m$ *les groupes libres à n et m générateurs.*

$$\text{A-t-on toujours } L(\boldsymbol{F}_n) \neq L(\boldsymbol{F}_m) \text{ ?}$$

De même, nous pouvons construire des algèbres de von Neumann à partir d'actions de groupes sur des espaces de probabilité standards sans atome. Des questions identiques se posent alors quant à l'interdépendance entre algèbres de von Neumann et actions de groupes.

Avant de détailler cette construction, commençons par rappeler ce qu'est un espace de probabilité standard.

Définition 1.19. *Un espace borélien standard est un espace isomorphe, en tant qu'espace mesuré, à une partie borélienne d'un espace métrique complet séparable.*

Un espace de probabilité standard est un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité. Ces espaces se présentent sous une des formes données par le théorème suivant.

Théorème 1.20. *Tout espace borélien standard de probabilité est isomorphe à l'intervalle* $[0,1]$ *muni de la mesure de Lebesgue, à un ensemble fini ou dénombrable d'atomes, ou une réunion des deux.*

Prenons maintenant Γ un groupe dénombrable discret et (X,μ) un espace de probabilité standard, que l'on supposera sans atome [10].

Définition 1.21. *On note* $Aut(X,\mu)$ *le groupe des bijections bi-mesurables* $T : X \to X$ *qui préservent la mesure* μ*, i.e.*

$$\mu(T(A)) = \mu(A), \quad \text{pour tout ensemble mesurable } A.$$

Définition 1.22. *Une action préservant la mesure de probabilité (p.m.p.)* $\sigma : \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ *est un morphisme de groupes :*

$$\sigma : \Gamma \to Aut(X,\mu).$$

Exemple 1.23.
1. $\mathbb{Z} \curvearrowright (\mathbb{T}^1,\mu)$ *action sur le cercle muni de la mesure de Haar normalisée* μ *par rotations irrationnelles définie pour tout* $\gamma \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{T}^1$ *par* $\gamma.z = e^{2i\pi\gamma\alpha}z$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
2. $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{T}^n,\mu)$, $n \geqslant 2$, *action naturelle de* $SL_n(\mathbb{Z})$ *sur le tore* $\mathbb{T}^n$*, muni de la mesure de Haar normalisée* μ.
3. $\Gamma \curvearrowright (X^\Gamma, \mu^{\otimes\Gamma})$ *action par décalage de Bernoulli de base* (X,μ)*, pour tout groupe dénombrable infini* Γ*. Cette action est donnée pour tous* $\gamma \in \Gamma$, $(x_{\gamma'})_{\gamma'\in\Gamma}$ *par :* $\gamma.(x_{\gamma'})_{\gamma'\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}\gamma'})_{\gamma'\in\Gamma}$.

Nous définissons maintenant la version mesurée de la liberté et de la transitivité d'une action.

Définition 1.24. *Soit* $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ *une action p.m.p. d'un groupe dénombrable* Γ *sur un espace de probabilité standard sans atome. On dit que l'action est :*
— *(essentiellement) libre si pour tout* $\gamma \in \Gamma\backslash\{e\}$*, on a* $\mu(\{x \in X : \gamma.x = x\}) = 0$;
— *ergodique si pour tout ensemble mesurable* $A \subset X$ *tel que* $\Gamma.A = A$*, on a* $\mu(A) = 0$ *ou* 1 [11].

Exemple 1.25. *Les actions présentées en 1.23 sont des exemples d'actions libres et ergodiques.*

Une action p.m.p. donne naturellement lieu à une action sur $L^\infty(X,\mu)$, et à une représentation unitaire sur $L^2(X,\mu)$:

10. (X,μ) désignera toujours un espace de probabilité standard sans atome.
11. Les égalités entre ensembles mesurables sont prises à ensemble de mesure nulle près. Ce qui vaut pour la suite du manuscrit.

Définition 1.26. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action p.m.p. d'un groupe dénombrable. On définit la représentation de Koopman comme :*

$$\begin{aligned} \kappa : \Gamma &\to \mathcal{U}(L^2(X,\mu)) \\ \gamma &\mapsto \kappa(\gamma) : \xi(.) \mapsto \xi(\gamma^{-1}.) \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'algèbre de von Neumann associée à une action de groupe p.m.p. : le produit croisé ou "group measure space construction", défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X,\mu) \otimes \ell^2(\Gamma)$.

Considérons les opérateurs unitaires définis sur cet espace par :

$$u_\gamma = \mathrm{Id} \otimes \lambda_\gamma, \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

ainsi que la représentation définie sur des vecteurs élémentaires par :

$$\begin{aligned} \pi : L^\infty(X,\mu) &\to \mathbb{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \pi(f) : \xi(.) \otimes \delta_\gamma \mapsto f(\gamma^{-1}.)\xi(.) \otimes \delta_\gamma \end{aligned}$$

où $\delta_\gamma : \Gamma \to \mathbb{C}, \gamma' \mapsto 1$ si $\gamma' = \gamma$ et 0 sinon.

Définition 1.27 ([MVN36])**.** *On appelle produit croisé l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(L^\infty(X,\mu))$ et les $u_\gamma, \gamma \in \Gamma$. On la note*

$$L^\infty(X,\mu) \rtimes \Gamma = \{\pi(f)u_\gamma,\ f \in L^\infty(X,\mu), \gamma \in \Gamma\}''.$$

Nous pouvons d'ores et déjà lire certaines propriétés de l'action sur le produit croisé à l'aide du résultat suivant.

Théorème 1.28. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action p.m.p. d'un groupe dénombrable Γ sur un espace de probabilité standard. Notons $A = L^\infty(X,\mu) \subset L^\infty(X,\mu) \rtimes \Gamma = M$.*
(i) L'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est libre si et seulement si $A = A' \cap M$ [12]*.*
(ii) Si $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est libre, M est un facteur si et seulement si l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est ergodique .

Exemple 1.29. *Les exemples cités en 1.23 donnent tous lieu à des facteurs de type II_1. La trace est définie sur $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ par*

$$\tau(a) := (a(\mathbb{1}_X \otimes \delta_e), \mathbb{1}_X \otimes \delta_e), \quad \textit{pour tout } a \in L^\infty(X) \rtimes \Gamma.$$

Les exemples précédents soulèvent naturellement une question : quand est-ce que les facteurs obtenus sont distincts ?

Plus généralement, peut-on distinguer deux facteurs d'un même type ?

C'est ce que proposent de faire Murray et von Neumann dans le cas de facteurs de type II_1, avec l'introduction du groupe fondamental.

12. La sous-algèbre A est alors une sous-algèbre abélienne maximale.

Définition 1.30. *Soit M un facteur de type II_1 de trace fidèle τ. Le groupe fondamental de M est le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ défini par :*

$$\mathcal{F}(M) = \left\{ \frac{\tau(p)}{\tau(q)} \ : \ p, q \text{ projectionq telleq que } pMp \cong qMq \right\}.$$

Le groupe fondamental est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$. Murray et von Neumann montrent que le groupe fondamental du facteur de type II_1 associé au groupe des permutations de $\mathbb{N}$ à support fini est $\mathbb{R}_+^*$ [MvN43].

Le calcul des groupes fondamentaux est un problème difficile, à tel point que Murray et von Neumann, bien que convaincus qu'il existe des facteurs de groupe fondamental différent de $\mathbb{R}_+^*$, n'ont pas réussi le démontrer.

Ce n'est que quelques années plus tard que Connes démontre qu'il existe des groupes fondamentaux qui ne sont pas $\mathbb{R}_+^*$. Il utilise pour cela la fameuse propriété (T).

En effet, Connes montre que l'algèbre de von Neumann d'un groupe dénombrable à classes de conjugaison infinies et qui a la propriété (T) de Kazhdan est de groupe fondamental dénombrable.

Plus généralement, il introduit la notion de propriété (T) pour un facteur de type II_1 et démontre que ces facteurs sont de groupe fondamental dénombrable. Néanmoins, ce résultat ne permet toujours pas de calculer explicitement un groupe fondamental distinct de $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.31 ([Con80b])**.** *Soit M un facteur de type II_1 ayant la propriété (T). Alors le groupe fondamental $\mathcal{F}(M)$ de M est dénombrable.*

Ainsi, l'extension de la propriété (T) aux algèbres de von Neumann a permis de préciser notre compréhension de celles-ci.

Quelques années plus tard, Popa étend la notion de propriété (T) relative à des inclusions d'algèbres de von Neumann dans le cadre de sa théorie de déformation/rigidité [Pop06a].

Il introduit en particulier la notion de propriété (T) relative à l'espace pour une action de groupe p.m.p. [13], ce qui lui permet d'exhiber les premiers exemples de facteurs de type II_1 dont le groupe fondamental est réduit à l'élément neutre.

La propriété (T) relative à l'espace est ensuite utilisée comme ingrédient clé pour produire des exemples de facteurs de type II_1 à groupe fondamental prescrit [PV10a, Hou09], nous permettant ainsi d'affiner notre compréhension de ces algèbres

Nous nous attardons sur cette notion de propriété (T) relative à l'espace dans la prochaine section, celle-ci constituant l'objet principal des chapitres suivants.

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [Tak02, Tak03a, Tak03b] pour une étude avancée des algèbres de von Neumann.

13. Popa emploie l'expression : action de groupe p.m.p. **rigide**.

1.3 Vers la propriété (T) relative à l'espace

Comme nous l'avons vu, c'est Popa qui a introduit la notion de propriété (T) relative pour des paires d'algèbres de von Neumann dans le cadre de sa théorie de déformation/rigidité.

L'idée de cette théorie est de faire jouer l'une contre l'autre des propriétés de rigidité (la propriété (T) relative à l'espace) contre des propriétés de déformation (propriété (H) de Haagerup) d'algèbres de von Neumann. Cela permet de déduire des résultats d'unicité de sous-$*$-algèbres maximales abéliennes. En particulier, comme nous l'avons remarqué dans l'Introduction après avoir défini l'équivalence orbitale, on peut ainsi démontrer que des actions von Neumann équivalentes sont en fait orbitalement équivalentes.

Pour étendre la propriété (T) relative aux algèbres de von Neumann, il convient tout d'abord de définir l'analogue pour les algèbres de von Neumann des représentations unitaires de groupes. Comme l'avait déjà relevé Connes [CJ85], ce sont les bimodules qui vont jouer ce rôle.

Définition 1.32. *Soient M, N des algèbres de von Neumann admettant une trace normale*[14] *fidèle. On dit qu'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un $M-N$-bimodule s'il est muni de deux $*$-représentations normales*[15] *commutant $\pi : M \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ et $\rho : N^{op} \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$.*

On écrira $x.\xi.y := \pi(x)\rho(y^{op})\xi$, pour tous $x \in M, y \in N, \xi \in \mathcal{H}$.

Soit M une algèbre de von Neumann munie d'une trace normale fidèle τ. On munit M d'une forme sesquilinéaire en posant

$$(x,y)_\tau = \tau(y^*x), \quad \text{pour tous } x,y \in M.$$

On obtient une norme sur M en posant $||x||_2 = \sqrt{\tau(x^*x)}$ et on note $L^2(M)$ le complété de M vis-à-vis de cette norme. Notons $i : M \to L^2(M)$ l'injection dense associée.

On obtient ainsi une représentation de M sur $L^2(M)$

$$\begin{aligned} \pi : M &\to \mathbb{B}(L^2(M)) \\ x &\mapsto \pi(x) \end{aligned}$$

où $\pi(x)$ est définie par $\pi(x)i(y) = i(xy)$ pour tous $x,y \in M$. On appelle cela la construction GNS.

Exemple 1.33. *Soient M, N des algèbres de von Neumann admettant une trace normale fidèle.*

(i) $L^2(M)$ est un $M-M$-bimodule défini par $x.\xi.y = x\xi y$, pour tous $x,y \in M$, $\xi \in L^2(M)$.

(ii) $L^2(M) \otimes L^2(N)$ est un $M-N$-bimodule défini par $x.(\xi \otimes \eta).y = (x\xi) \otimes (\eta y)$ pour tous $x,y \in M$, $\xi \in L^2(M)$, $\eta \in L^2(N)$.

Comme nous l'avons annoncé, les bimodules sont aux algèbres de von Neumann ce que les représentations unitaires sont aux groupes.

14. Une trace $\tau : M \to \mathbb{C}$ est normale si elle est faiblement continue sur la boule unité de M.
15. i.e. faiblement continues sur les boules unités $(M)_1$ et $(N)_1$ respectivement

En effet, prenons Γ un groupe dénombrable et $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation unitaire. Notons $M = L(\Gamma)$ l'algèbre de von Neumann associée et $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ les unitaires canoniques de M.

L'espace de Hilbert qui nous servira de bimodule est $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \ell^2(\Gamma)$. On pose pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tous $g, h \in \Gamma$:

$$u_g.(\xi \otimes \delta_h) = \pi(g)(\xi) \otimes \delta_{gh}$$
$$(\xi \otimes \delta_h).u_g = \xi \otimes \delta_{hg}$$

On vérifie alors que ces produits font de $\mathcal{K}$ un $M - M$-bimodule.

Remarque 1.34. *Dans le cas où π est la représentation régulière de Γ, le bimodule $\mathcal{K}$ construit précédemment n'est rien d'autre que $L^2(M) \otimes L^2(M)$.*

Définition 1.35 ([Pop06a])**.** *Soient $B \subset M$ des algèbres de von Neumann et soit τ une trace normale fidèle sur M.*
On dit que l'inclusion $B \subset M$ a la propriété (T) relative si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un sous-ensemble fini $F \subset M$ tel que pour tout $M - M$-bimodule $\mathcal{H}$ et pour tout vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}$ pour lequel

(i) $(x\xi, \xi) = (\xi x, \xi) = \tau(x)$, pour tout $x \in M$,

(ii) $||x\xi - \xi x|| \leqslant \delta$, pour tout $x \in F$, i.e. ξ est un vecteur $(F, \delta)-$central,

il existe un vecteur $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $b\eta = \eta b$ pour tout $b \in B$, i.e. η est B-central et $||\eta - \xi|| \leqslant \varepsilon$.

On dit que M a la propriété (T) si l'inclusion $M \subset M$ a la propriété (T) relative.

Remarque 1.36. *L'analogue pour les algèbres de von Neumann des vecteurs invariants (presque invariants) pour des représentations unitaires de groupes sont les vecteurs centraux (presque centraux). De même qu'avec les paires de groupes, on peut définir de manière équivalente la propriété (T) relative pour des inclusions d'algèbres de von Neumann à l'aide de suites de vecteurs presque centraux.*

L'inclusion $B \subset M$ a la propriété (T) relative si et seulement si pour tout $M - M$-bimodule $\mathcal{H}$ et toute suite de vecteurs unitaires (ξ_n) de $\mathcal{H}$ vérifiant

(i) $(x\xi_n, \xi_n) = (\xi_n x, \xi_n) = \tau(x)$, pour tout $x \in M$ et pour tout $n \geqslant 1$;

(ii) $||x\xi_n - \xi_n x|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $x \in M$;

il existe une suite de vecteurs (η_n) de $\mathcal{H}$ telle que $b\eta_n = \eta_n b$, pour tout $b \in B$ et tout $n \geqslant 1$, et avec $||\eta_n - \xi_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le résultat suivant montre que la définition que nous venons de donner pour une inclusion d'algèbres de von Neumann étend bien celle de propriété (T) relative pour une paire de groupes.

Théorème 1.37 ([Pop06a])**.** *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ des groupes dénombrables. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) la paire (Γ, Λ) a la propriété (T) relative ;

(ii) l'inclusion $L(\Lambda) \subset L(\Gamma)$ a la propriété (T) relative.

Exemple 1.38. *On déduit du Théorème 1.37 et de l'Exemple 1.6 que pour $n \geqslant 2$, l'inclusion*

$$L^\infty(\mathbb{T}^n) \cong L(\mathbb{Z}^n) \subset L(\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})) \cong L^\infty(\mathbb{T}^n) \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$$

a la propriété (T) relative.

Nous pouvons maintenant définir la propriété (T) relative à l'espace pour des actions p.m.p. de groupes dénombrables.

Définition 1.39. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action p.m.p. d'un groupe dénombrable Γ sur un espace de probabilité standard sans atome (X,μ).*

On dit que l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace si l'inclusion d'algèbres de von Neumann $L^\infty(X) \subset L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a la propriété (T) relative.

Exemple 1.40. *On déduit de l'Exemple 1.38 que l'action $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{T}^2,\mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace.*

Nous pouvons maintenant revenir au problème qui a motivé l'introduction de la propriété (T) relative à l'espace : la classification des facteurs de type II_1. La propriété (T) relative à l'espace permet à Popa de donner les premiers exemples de facteurs de type II_1 à groupe fondamental trivial. Il utilise pour cela de manière fondamental la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{T}^2,\mu)$.

Théorème 1.41 ([Pop06a]). *Le groupe fondamental de l'algèbre de von Neumann $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$, donnée par l'action naturelle de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}^2$, est réduit à l'élément neutre.*

En outre, Popa, Vaes et Houdayer mettent à profit la propriété (T) relative à l'espace de certaines actions pour produire des exemples de facteurs II_1 à groupe fondamental prescrit [PV10a, Hou09].

Remarque 1.42. *On peut démontrer que l'algèbre de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a la propriété (T) si et seulement si Γ a la propriété (T) et l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace. Ceci permet notamment d'obtenir de nouveaux exemples d'algèbres de von Neumann ayant la propriété (T).*

Remarque 1.43. *Lors de l'introduction de la propriété (T) relative à l'espace pour les actions de groupes, Popa emploie le terme de rigidité. Suivant [Gab10], nous lui préférons l'expression de propriété (T) relative à l'espace puisque cette propriété dépend étroitement de l'action et que l'on demande que le produit croisé $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ ait la propriété (T) relativement à $L^\infty(X)$.*

Dans le cas des actions de groupes par automorphismes sur des groupes abéliens, nous pouvons relier propriété (T) relative de paires de groupes et propriété (T) relative à l'espace.

Soit A un groupe dénombrable abélien infini et soit Γ un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aut}(A)$. Notons $\hat{A}$ le groupe dual de A, compact puisque A est discret. Soit μ la mesure de Haar normalisée sur $\hat{A}$. Alors, l'action $\Gamma \curvearrowright (\hat{A},\mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si la paire de groupe $(A \rtimes \Gamma, A)$ a la propriété (T) relative (voir la Proposition 5.1 [Pop06a]).

La propriété (T) relative de telles paires de groupes est l'objet de nombreuses recherches [Bur91, CT11] et nous permet d'orienter les nôtres. Par exemple, nous obtenons une caractérisation simple de la propriété (T) relative à l'espace généralisant celle obtenue par Burger [Bur91] (voir Théorème 2.32).

Incarnons maintenant les concepts introduits au moyen de quelques exemples-clé ce qui nous permet de mieux saisir le vocabulaire adopté et de soulever plusieurs questions.

Exemple 1.44. 1. *Les actions p.m.p. de groupes moyennables n'ont jamais la propriété (T) relative à l'espace, voir Remarque 2.19.*

2. *Les actions de Bernoulli de groupes dénombrables n'ont jamais la propriété (T) relative à l'espace, voir Remarque 2.21.*

Le fait que les actions de Bernoulli n'aient jamais la propriété (T) relative à l'espace montre que cette propriété ne dépend pas seulement du groupe, mais aussi de l'action considérée.

La propriété (T) relative à l'espace est ainsi une propriété ergodique, i.e. propre à la dynamique de l'action. Elle est d'ailleurs invariante par orbite équivalence. Il parait donc naturel de donner une caractérisation purement ergodique de la propriété (T) relative à l'espace pour des actions de groupes p.m.p.. C'est ce que Ioana a fait dans un premier temps, voir Proposition 2.1.

Nous donnons pour notre part une caractérisation ergodique plus simple de la propriété (T) relative à l'espace dans le cadre d'actions par transformations affines sur des espaces homogènes de groupes de Lie p-adiques G quotientés par des réseaux Λ : le Théorème 2.32.

Par ailleurs, le fait que les actions de groupes moyennables n'aient pas la propriété (T) relative à l'espace soulève naturellement la question suivante (voir Problème 5.10.2 [Pop06a]) : est-ce que tout groupe dénombrable non-moyennable admet une action libre ergodique p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace ?

Cette question est encore ouverte. Nous apportons une réponse affirmative à ce problème pour une large classe de groupes dénombrables : les groupes linéaires sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennables et à radical résoluble trivial (voir Théorème 3.2). La démonstration de ce résultat fait intervenir de nouvelles constructions présentées dans la section 2.3.

Chapitre 2

Propriété (T) relative à l'espace

On s'intéresse dans ce chapitre aux aspects théoriques de la propriété (T) relative à l'espace.

On étudie le comportement de cette notion vis-à-vis de plusieurs constructions : produit d'actions pmp, restriction, co-induction, induction. On montre en particulier que la propriété (T) relative à l'espace est préservée par restriction d'une action aux sous-groupes co-moyennables.

On donne par ailleurs un critère pour qu'une action de groupe par transformations affines sur un espace homogène d'un groupe de Lie S-adique ait la propriété (T) relative à l'espace : soient G un groupe de Lie S-adique, Λ un réseau de G, μ la mesure de probabilité G-invariante sur G/Λ et Γ un sous-groupe dénombrable du groupe affine $\mathrm{Aff}(G)$ stabilisant Λ. L'action $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si l'action induite de Γ sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ n'admet pas de mesure de probabilité Γ-invariante, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G.
Ce critère généralise des résultats de Burger [Bur91], et Ioana-Shalom [IS13].

Sommaire

2.1 Introduction

Nous avons vu précédemment de quelles manières la propriété (T) relative à l'espace a été utilisée en pratique. Nous nous focalisons maintenant sur les aspects théoriques de cette notion, à savoir :

— donner des critères de rigidité plus maniables que la définition initiale donnée en termes de paires d'algèbres de von Neumann ;

— étudier la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace vis-à-vis de diverses constructions : produit d'actions p.m.p., restriction, co-induction et induction ;

— construire de nouveaux exemples d'actions ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Pour ce qui est du premier point, Ioana donne une caractérisation purement ergodique de la propriété (T) relative à l'espace des actions de groupes [Ioa10, IS13]. Nous prenons d'ailleurs cette caractérisation comme point de départ dans la suite de ce manuscrit.

Proposition 2.1 ([Ioa10, IS13]). *Une action préservant la mesure de probabilité $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ d'un groupe dénombrable Γ sur un espace de probabilité standard (X,μ) a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si pour toute suite de mesures de probabilité (ν_n) définies sur $X \times X$ et vérifiant [16] :*

1. *$p^i_*\nu_n = \mu$ pour tout n et $i = 1, 2$, où $p^i : X \times X \to X$ est la projection sur la i-ème coordonnée,*
2. *$\int_{X\times X} \phi(x)\psi(y)d\nu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \phi(x)\psi(x)d\mu(x)$, pour toutes fonctions boréliennes bornées ϕ, ψ sur X,*
3. *$||(\gamma\times\gamma)_*\nu_n - \nu_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

on a $\nu_n(\Delta_X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, où Δ_X est la diagonale dans $X \times X$.

16. On munit l'espace des mesures $\mathcal{M}(X)$ de la norme $||\nu|| = \sup_{\phi\in B(X),||\phi||_\infty=1} |\nu(\eta)|$ pour tout $\nu \in \mathcal{M}(X)$, où $B(X)$ désigne l'ensemble des fonctions boréliennes bornées.

Faisons remarquer qu'une caractérisation semblable est obtenue indépendamment par de Cornulier et Tessera dans leur étude de la propriété (T) relative de paires de groupes de la forme $(A \rtimes H, A)$ où H et A sont des groupes localement compacts, σ-compacts, A étant de plus abélien [CT11].

Cette caractérisation repose principalement sur le théorème spectral. Partant d'un bi-module $\mathcal{H}$ pour le produit croisé d'une action p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ admettant une suite de vecteurs unitaires traciaux presque-centraux $(\xi_n) \in \mathcal{H}$, Ioana considère la représentation de $C(X \times X)$ sur ce bi-module. Le théorème spectral permet alors de construire une suite de mesures de probabilité sur l'espace produit $(X \times X, \mu \otimes \mu)$ à l'aide de la suite $(\xi_n) \in \mathcal{H}$. C'est cette suite de mesures de probabilité qui permet d'obtenir une caractérisation purement ergodique de la propriété (T) relative à l'espace.

Cette idée trouve son origine dans l'étude de la paire $(\mathbb{R}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{R}^n)$, pour Γ sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (voir section 2.2.1).

A l'aide de cette caractérisation, nous sommes capables de donner un critère de rigidité fort pratique pour une large classe d'actions de groupes : les actions par transformations affines sur des espaces homogènes de groupes de Lie p-adiques, $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$. C'est l'objet du Théorème 2.32.

Pour ce qui est du deuxième axe d'étude, nous obtenons des résultats de stabilité pour chacune des constructions citées. Concernant la stabilité par restriction, nous montrons que la propriété (T) relative à l'espace d'une action de groupe passe à tout sous-groupe co-moyennable (voir Définition 2.17 et Proposition 2.18).

Ce résultat, dont nous ferons grandement usage, soulève d'ailleurs la question ouverte suivante.

Question 2.2. *Pour $B \subset M \subset N$ des algèbres de von Neumann tels que $M \subset N$ soit co-moyennable et $B \subset N$ ait la propriété (T) relative, est-ce que $B \subset N$ possède aussi la propriété (T) relative à l'espace ?*

Enfin, nous obtenons de nouveaux exemples d'actions de groupes ayant la propriété (T) relative à l'espace à l'aide de ces différents résultats (voir sections 2.2.3 et 2.4.3). Le prochain chapitre est d'ailleurs l'objet du troisième axe d'étude, puisque nous sommes capables de produire des actions ayant la propriété (T) relative à l'espace pour tout groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et non-moyennable.

2.2 Premiers exemples : actions sur le tore

Dans cette section, on s'intéresse aux premiers exemples introduits dans la littérature d'actions de groupe ayant la propriété (T) relative à l'espace ; les actions de groupes $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ sur les tores $\mathbb{T}^n$, $n \geqslant 2$.

Ce sont d'ailleurs ces actions, et plus particulièrement l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{T}^2, \mu)$, qui sont à l'origine des applications les plus remarquables.

Ces exemples présentent en outre l'avantage d'être directement liés à la propriété (T) relative des paires $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$, qui sont l'objet de nombreuses études.

Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 4 pour une étude d'une large classe d'actions de groupes par automorphismes, cette fois-ci sur des nilvariétés de groupes de Lie nilpotents de rang 2.

2.2.1 Mesures invariantes

On cherche ici à établir un critère pour que les actions par automorphismes d'un groupe Γ sur les tores $\mathbb{T}^n$ aient la propriété (T) relative à l'espace. Nous savons déjà que celle-ci équivaut à la propriété (T) relative pour la paire $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$. On se restreint donc dans cette partie à l'étude de paires de cette forme.

Nous commençons par donner quelques critères obtenus jusqu'à présent et qui orienteront nos prochains résultats, notamment le Théorème 2.32, résultat principal de ce chapitre.

L'outil principal de ces critères repose sur le théorème spectral, que nous rappelons. On note $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne d'un espace X, et $\hat{A}$ le groupe dual d'un groupe abélien localement compact A.

Théorème 2.3. *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe localement compact abélien A. Il existe une unique mesure spectrale régulière $E_\pi : \mathcal{B}(\hat{A}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ sur $\hat{A}$ telle que*

$$\pi(a) = \int_{\chi \in \hat{A}} \overline{\chi(a)} \mathrm{d}E_\pi(\chi), \text{ pour tout } a \in A.$$

De plus, un opérateur $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ commute avec $\pi(a)$ pour tout $a \in A$ si et seulement si T commute avec $E_\pi(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\hat{A})$.

L'idée est la suivante. Prenons une paire $(A \rtimes \Gamma, A)$ où A est un groupe discret abélien. La restriction à A d'une représentation unitaire de $A \rtimes \Gamma$ donne lieu à une représentation unitaire d'un groupe abélien. Le théorème spectral nous permet alors de décomposer cette représentation en intégrale sur l'espace dual de A.

On lie ainsi la propriété (T) relative d'une telle paire de groupe à l'action de Γ sur le groupe dual $\hat{A}$. Plus précisément, Burger a démontré le résultat suivant.

Théorème 2.4 ([Bur91], Prop. 7)**.** *Soit k un corps local. Soit $\Gamma \subset GL_n(k)$ un sous-groupe dénombrable. Supposons qu'il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\hat{k}^n)$. Alors la paire $(k^n \rtimes \Gamma, k^n)$ a la propriété (T) relative.*

Démonstration :

Procédons par l'absurde et supposons que la paire $(k^n \rtimes \Gamma, k^n)$ n'ait pas la propriété (T) relative.
Prenons alors $\pi : k^n \rtimes \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation unitaire de $k^n \rtimes \Gamma$ admettant des vecteurs presque invariants, mais pas de vecteurs invariants.
Soit $E : \mathcal{B}(\hat{k}^n) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ la mesure spectrale associée à la représentation restreinte $\pi_{|k^n}$.
Notons $(\xi_m) \in \mathcal{H}$ une suite de vecteurs unitaires presque invariants. On définit une suite de mesure de probabilité (μ_m) sur $\hat{k}^n$ par $\mu_m(B) = (E(B)\xi_m, \xi_m)$.
Puisque π n'admet pas de vecteur invariant, on a $\mu_m(\{0\}) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On peut alors voir cette mesure sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\hat{k}^n)$, qui possède la bonne propriété d'être un espace métrique compact. On note encore cette mesure μ_m.

On vérifie que l'on a alors pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$||\gamma_* \mu_m - \mu_m|| \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0. \quad (*)$$

Puisque $\mathbb{P}(\hat{k}^n)$ est un espace métrique compact, l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\hat{k}^n))$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{P}(\hat{k}^n)$, muni de la topologie faible-$*$, est un espace compact métrisable. Ainsi, quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que (μ_m) converge vers une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{P}(\hat{k}^n)$.
Enfin, $(*)$ nous permet d'affirmer que μ est γ-invariant. Puisque cela est vérifié pour tout $\gamma \in \Gamma$, on obtient une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\hat{k}^n)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
La paire $(k^n \rtimes \Gamma, k^n)$ a donc la propriété (T) relative.

□

La réciproque de ce résultat a été démontrée plus tard par de Cornulier. Il utilise pour cela le fameux Lemme de Furstenberg [Fur76], voir Lemme 2.6.

Théorème 2.5 ([dC06], Prop. 3.1.9)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local k. Soient G un groupe localement compact et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) il n'existe pas de mesure de probabilité G-invariante sur $\mathbb{P}(V^*)$,
(ii) la paire $(V \rtimes G, V)$ a la propriété (T) relative.

Nous aurons nous aussi à invoquer le Lemme de Furstenberg à plusieurs reprises, notamment dans la démonstration de notre Théorème 2.32. Nous en faisons d'ailleurs une utilisation semblable. Nous rappelons donc ci-dessous ce résultat.

Lemme 2.6 ([Fur76])**.** *Soit k un corps local. Soit V un k-espace vectoriel. Soit $\Gamma \subset SL(V)$ un sous-groupe dénombrable. Soit μ une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(V)$.*
Si $\Gamma \subset SL(V)$ n'est pas bornée, alors il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et un sous-espace propre Γ-invariant $W \subset V$ tel que $supp(\mu) \subset [W] \subset \mathbb{P}(V)$, où $[W]$ désigne l'image de W dans $\mathbb{P}(V)$.

2.2.2 Propriété (T) relative à l'espace et ergodicité forte

On s'intéresse maintenant à une question soulevée par Popa : est-ce que les actions libres, ergodiques et ayant la propriété (T) relative à l'espace sont nécessairement fortement ergodiques ?

En considérant des actions sur les tores, Ioana et Vaes montrent que ce n'est pas le cas [IV12].

Nous souhaitons préciser leur réponse et montrer qu'il existe effectivement un lien entre propriété (T) relative à l'espace et ergodicité forte.

Commençons par rappeler quelques définitions et ce qui a motivé cette question.

Définition 2.7. *On dit qu'une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ préservant la mesure de probabilité d'un groupe dénombrable est fortement ergodique s'il n'existe pas de sous-ensembles de X non triviaux et asymptotiquement Γ-invariants, i.e. pour toute suite de sous-ensembles mesurables $(X_n) \subset X$ on a*

$$\mu(X_n \Delta \gamma . X_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \forall \gamma \in \Gamma \Rightarrow \mu(X_n)(1 - \mu(X_n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cette notion d'ergodicité forte est étroitement liée à celle de trou spectral, que nous rappelons.

Définition 2.8. *On dit qu'une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ préservant la mesure de probabilité d'un groupe dénombrable Γ a trou spectral si la représentation de Koopman associée*

$$\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathrm{L}^2(\mathrm{X}) \ominus \mathbb{C})$$

ne contient pas faiblement la représentation triviale, i.e. n'admet pas de vecteurs presque invariants.

On vérifie facilement que toute action ayant trou spectral est fortement ergodique. Dans le cas d'actions par automorphismes sur des tores (et plus généralement sur des nilvariétés, voir Chapitre 4), il se trouve que l'on a même équivalence.

Par ailleurs, si le groupe Γ a la propriété (T) alors toute action p.m.p. ergodique de Γ est nécessairement fortement ergodique (puisqu'elle a alors un trou spectral). C'est dans cette optique que Popa souleva cette question.

Nous apportons un éclairage positif à cette question. Pour cela, nous rappelons un résultat obtenu par Bekka et Guivarc'h dans le cadre de leur étude d'actions de groupes par transformations affines sur des nilvariétés compactes.

Théorème 2.9 ([BG15]). *Soit Γ un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Z})$. On a les équivalences :*

1. *l'action de Γ sur $\mathbb{T}^n$ n'a pas de trou spectral,*
2. *l'action de Γ sur $\mathbb{T}^n$ n'est pas fortement ergodique,*
3. *il existe un sous-espace rationnel non nul W de $\mathbb{R}^n$ invariant par le sous-groupe ${}^t\Gamma$ de $SL_n(\mathbb{Z})$ et tel que l'image de ${}^t\Gamma$ dans $GL(W)$ est moyennable,*
4. *il existe un sous-espace rationnel non nul W de $\mathbb{R}^n$ invariant par ${}^t\Gamma$ et tel que l'image de ${}^t\Gamma$ dans $GL(W)$ est virtuellement abélien.*

Le Lemme de Furstenberg et le Théorème 2.4 nous permettent alors d'établir le lien entre propriété (T) relative à l'espace et ergodicité forte dans le cadre d'actions sur les tores.

Proposition 2.10. *Soit Γ un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Z})$. Supposons que l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ ait la propriété (T) relative à l'espace, alors l'action transposée ${}^t\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ est fortement ergodique.*

Démonstration :

Procédons par l'absurde et supposons que l'action transposée ${}^t\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ ne soit pas fortement ergodique. D'après le Théorème 2.9, il existe un sous-espace rationnel non trivial W de $\mathbb{R}^n$ invariant par le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et tel que l'image de Γ dans $\mathrm{GL}(W)$ est moyennable.
Par moyennabilité de Γ dans $\mathrm{GL}(W)$, on obtient une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(W)$. Mais alors, on obtient aussi une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui contredit la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$.
L'action ${}^t\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ est donc fortement ergodique.

□

On en déduit en particulier le résultat suivant.

Proposition 2.11. *Soit Γ un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Z})$ stable par transposée, i.e. ${}^t\Gamma = \Gamma$. Supposons que l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ ait la propriété (T) relative à l'espace, alors cette action est fortement ergodique.*

Remarque 2.12. *Les contre-exemples donnés par Ioana et Vaes montrent justement qu'ils ont dû éviter de tels groupes afin d'obtenir des actions non fortement ergodiques et ayant la propriété (T) relative à l'espace.*

2.2.3 Produits de sous-groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$

Dans leur article [IS13], Ioana-Shalom ont posé la question suivante : est-ce que le groupe $\mathbf{F}_2 \times \mathbb{Z}$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ? Nous renvoyons à la section 2.4.3 et à la Remarque 2.43 pour les motivations d'un tel problème.

Plus généralement, nous pouvons poser la question suivante. Soient Γ, Λ deux groupes dénombrables. Est-ce que le produit $\Gamma \times \Lambda$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ?

Nous montrons que dans le cas de sous-groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, il suffit que l'un de ces deux groupes admette une action libre ergodique avec la propriété (T) relative à l'espace sur le tore $\mathbb{T}^n$.

Proposition 2.13. *Soient $n, m \in \mathbb{N}$.*
Soit $\Gamma \subset SL_n(\mathbb{Z})$ un sous-groupe tel que l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ sur le tore muni de la mesure de Lebesgue soit libre, ergodique et ait la propriété (T) relative à l'espace.
Alors, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset SL_m(\mathbb{Z})$, $\Gamma \times \Lambda$ admet une action libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Démonstration :

Considérons le produit tensoriel $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Le groupe $\Gamma \times \Lambda$ agit sur cet espace vectoriel par :

$$(\gamma, \lambda).(u \otimes v) = \gamma(u) \otimes \lambda(v), \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma, \lambda \in \Lambda, u \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m.$$

Par ailleurs, en identifiant $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R}^{nm}$, on obtient une action de $\Gamma \times \Lambda$ sur le tore $\mathbb{T}^{nm}$, puisque cette action préserve $\mathbb{Z}^{nm}$. Montrons que cette action est libre, ergodique et qu'elle a la propriété (T) relative à l'espace.

Pour ce qui est de la liberté, il suffit de remarquer que l'on a identifié $\Gamma \times \Lambda$ à un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{nm}(\mathbb{Z})$ et que celui-ci agit librement sur $\mathbb{T}^{nm}$.
Quant à l'ergodicité, elle découle de l'ergodicité de l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$. En effet, il suffit de noter que Γ agit diagonalement sur $(\mathbb{T}^n)^m$.
Enfin, pour ce qui est de la propriété (T) relative à l'espace, elle découle directement de la Proposition 2.15, puisque Γ agit diagonalement sur $(\mathbb{T}^n)^m$ et que l'action $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace.
Ce qui achève la démonstration.

□

On répond donc en particulier à la question de Ioana et Shalom en considérant des injections $\mathbf{F}_2, \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Remarque 2.14. *Nous le verrons dans la Remarque 3.14 que cette proposition est encore valable lorsque l'on considère des actions sur des solénoïdes, i.e. des espaces de la forme $(\mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p)^n / \mathbb{Z}[S^{-1}]^n$.*

2.3 Stabilité de la propriété (T) relative à l'espace

Dans cette section, on étudie la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace vis-à-vis de certaines constructions standards.

La première, élémentaire, consiste à considérer le produit d'actions p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace d'un groupe Γ. On se demande si la propriété (T) relative à l'espace est préservée pour l'action diagonale de Γ sur l'espace produit. On montre que tel est bien le cas.

Ensuite, on s'intéresse à la restriction d'une action p.m.p. d'un groupe Γ à un sous-groupe Λ. On donne une condition suffisante pour que la propriété (T) relative à l'espace de l'action de Γ soit préservée par restriction à Λ : la co-moyennabilité.

Enfin, on s'intéresse au problème inverse. Partant d'un groupe Γ admettant une action p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace, comment peut-on passer à un sur-groupe de Γ ? On étudie pour cela deux constructions : la co-induction et l'induction.

2.3.1 Action diagonale sur un produit fini

Plaçons-nous dans le cadre suivant. Soient $n \in \mathbb{N}$ et Γ un groupe dénombrable. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit (X_i, μ_i) un espace de probabilité standard sur lequel Γ agit en préservant la mesure μ_i.

On s'intéresse à la dépendance de la propriété (T) relative à l'espace de l'action diagonale $\Gamma \curvearrowright \prod_{i=1}^{n}(X_i, \mu_i)$ par rapport aux actions sur chaque facteur $\Gamma \curvearrowright (X_i, \mu_i)$. Celle-ci est naturelle, voir Proposition 2.15 : l'action diagonale a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si l'action sur chaque facteur a la propriété (T) relative à l'espace.

Nous utilisons ce résultat afin de construire des actions libres à partir d'actions qui ne le sont pas nécessairement au départ, notamment dans la démonstration du Théorème 3.2. Rappelons que l'on note $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ l'ensemble des bijections boréliennes qui préserve la mesure μ, identifiées à mesure nulle prés.

Proposition 2.15. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(X_i, \mu_i)_{i=1,\ldots,n}$ des espaces de probabilité standards. Posons $(X, \mu) = \prod_i (X_i, \mu_i)$. Soit $\Gamma \subset \prod_i Aut(X_i, \mu_i)$ un groupe dénombrable.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace,

(ii) pour $i = 1, \ldots, n$, l'action $\pi_i(\Gamma) \curvearrowright (X_i, \mu_i)$ a la propriété (T) relative à l'espace, où π_i désigne la projection de $\prod_{j=1}^{n} Aut(X_j, \mu_j)$ sur $Aut(X_i, \mu_i)$.

Démonstration :
(i) $\Rightarrow$ (ii) :
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit (ν_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $X_i \times X_i$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $p^k_* \nu_n = \mu_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k = 1, 2$, où p^k désigne la projection de $X_i \times X_i$ sur la k-ème coordonnée,
2. $\int_{X_i \times X_i} \phi(x)\psi(y) \mathrm{d}\nu_n(x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{X_i} \phi(x)\psi(x) \mathrm{d}\mu_i$, pour tous $\phi, \psi \in \mathrm{B}(X_i)$,
3. $\| (\pi_i(\gamma) \times \pi_i(\gamma))_* \nu_n - \nu_n \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Nous souhaitons montrer que $\lim_{n\to\infty} \nu_n(\Delta_{X_i}) = 1$. Considérons $(\eta_n) \in \mathcal{M}(X \times X)$ la suite de mesures de probabilité définies par :

$$\eta_n = \nu_n \otimes (\bigotimes_{j\neq i} q^j_* \mu_j),$$

où $q^j : X_j \to X_j \times X_j$, $x \mapsto (x,x)$. Cette suite vérifie les conditions 1. 2. et 3. de la Proposition 2.1 pour l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$.
Puisque l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace, on obtient :

$$\eta_n(\Delta_X) = \nu_n(\Delta_{X_i}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, l'action $\pi_i(\Gamma) \curvearrowright (X_i,\mu_i)$ a la propriété (T) relative à l'espace.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :
Supposons maintenant que pour $i = 1,\dots,n$, les actions $\pi_i(\Gamma) \curvearrowright (X_i,\mu_i)$ aient la propriété (T) relative à l'espace. Soit (η_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $X \times X$ vérifiant les trois conditions de la Proposition 2.1. Nous devons montrer que $\lim_{n\to\infty} \eta_n(\Delta_X) = 1$.
Pour $i = 1,\dots,n$, considérons (ν^i_n) la suite de mesures de probabilité définies sur $(X_i \times X_i, \mu_i \otimes \mu_i)$ par :

$$\nu^i_n = p^i_* \eta_n, \text{ où } p^i_* \text{ est la projection } p^i : X \times X \to X_i \times X_i.$$

Pour tout $i = 1,\dots,n$, la suite (ν^i_n) satisfait les propriétés de la Proposition 2.1 pour l'action $\pi_i(\Gamma) \curvearrowright (X_i,\mu_i)$. Ainsi, pour tout $i = 1,\dots,n$, on a :

$$\nu^i_n(\Delta_{X_i}) = \eta_n(\prod_{j\neq i}(X_j \times X_j) \times \Delta_{X_i}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

De sorte que

$$\eta_n(\Delta_X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a donc la propriété (T) relative à l'espace.

□

Remarque 2.16. *La proposition n'est plus vraie lorsque l'on considère l'action diagonale sur un produit infini. En effet, pour $(X,\mu) = \prod_{i=1}^\infty (X_i,\mu_i)$ un produit infini d'espaces de probabilité standards, considérons la suite de mesures de probabilité (η_n) définie par :*

$$\eta_n = (\bigotimes_{i=1}^{n} q_*\mu) \otimes (\bigotimes_{i=n+1}^{\infty} \mu \otimes \mu)$$

où $q : X \to X \times X, x \mapsto (x,x)$. Cette suite satisfait les propriétés 1., 2. et 3. de la Proposition 2.1 pour toute action diagonale $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$. Puisque $\eta_n(\Delta_X) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que les actions diagonales sur un produit infini n'ont pas la propriété (T) relative à l'espace.

2.3.2 Co-moyennabilité

Soit Γ un groupe dénombrable agissant sur un espace de probabilité standard (X, μ) en préservant la mesure. Soit Λ un sous-groupe de Γ. Si l'action restreinte $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace, alors, de manière évidente, il en est de même de $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$. Qu'en est-il de la réciproque ?

Nous montrons que celle-ci est vérifiée lorsque Λ est un sous-groupe co-moyennable de Γ.

Commençons par rappeler la définition suivante.

Définition 2.17. *Soit Γ un groupe dénombrable et soit Λ un sous-groupe de Γ. On dit que Λ est un sous-groupe co-moyennable de Γ (ou que l'espace homogène Γ/Λ est moyennable au sens d'Eymard [Eym72]) s'il existe une suite (f_n) d'éléments de $l^1(\Gamma/\Lambda)$ telle que :*

1. $f_n \geqslant 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
2. $||f_n||_1 = 1$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
3. $||\pi(\gamma)f_n - f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *où* $\pi(\gamma)f_n(x) = f_n(\gamma^{-1}x)$, *pour tout* $x \in \Gamma/\Lambda$.

On se propose de démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.18. *Soit Γ un groupe dénombrable et soit Λ un sous-groupe.*
Une action préservant la mesure de probabilité $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si l'action restreinte $\Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace.

Démonstration :

Soit $D \subset \Gamma$ un domaine fondamental pour l'action à droite de Λ sur Γ, de sorte que

$$\Gamma = \sqcup_{\lambda\in\Lambda} D\lambda.$$

On transfert l'action par translations de Γ sur Γ/Λ en une action $(\gamma, h) \mapsto \gamma\tilde{.}h$, de Γ sur D ; pour tous $\gamma \in \Gamma$, $h \in D$, celle-ci est définie par :

$$\gamma\tilde{.}h := \gamma h c(\gamma, h)^{-1},$$

où $c(\, , \,) : \Gamma \times D \to \Lambda$ est le cocycle tel que $\gamma h c(\gamma, h)^{-1} \in D$.
Puisque Γ/Λ moyennable au sens d'Eymard, il existe une suite de fonctions positives $(\tilde{f}_n) \in l^1(\Gamma/\Lambda)$ telle que

1. $||\tilde{f}_n||_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. pour tout $\gamma \in \Gamma$, $||\pi(\gamma)\tilde{f}_n - \tilde{f}_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Introduisons la suite de fonctions $(f_n) \in l^1(D)$ définies par :

$$f_n(h) = \tilde{f}_n(h\Lambda), \quad \forall h \in D.$$

Procédons maintenant par contraposée et supposons que l'action de Λ sur (X, μ) n'ait pas la propriété (T) relative à l'espace.
Soit (ν_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $X \times X$ et vérifiant :

1. $p^i_*\nu_n = \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1, 2$,

2. $\int_{X\times X}\phi(x)\psi(y)d\nu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \phi(x)\psi(x)d\mu(x)$, pour tout $\phi,\psi \in B(X)$,
3. $||(\lambda\times\lambda)_*\nu_n - \nu_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\lambda \in \Lambda$,
4. $\liminf_{n\to\infty}\nu_n(\Delta_X) < 1$.

Considérons l'ensemble de mesures de probabilité $\eta_{n,m}$ définies sur $X\times X$ par :

$$\eta_{n,m} = \sum_{h\in D} f_m(h)(h\times h)_*\nu_n$$

Montrons que l'on peut extraire une suite de mesures de probabilité (η_m) de l'ensemble des mesures $\eta_{n,m}$ qui satisfait les quatre propriétés précédentes pour l'action de Γ sur (X,μ).

Pour ce qui est du premier point, on vérifie directement que pour tout $n,m \in \mathbb{N}$ et pour $i = 1,2$ on a $p^i_*\eta_{n,m} = \mu$.
En effet, pour tout sous-ensemble borélien $B \subset X$:

$$\begin{aligned}\eta_{n,m}(B\times X) &= \sum_{h\in D}\int_{x\in X\times X} f_m(h)\mathbb{1}_{B\times X}(x,x)\mathrm{d}\nu_n(x)\\ &= \sum_{h\in D} f_m(h)\mu(B)\\ &= \mu(B).\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la deuxième propriété.
Prenons alors $\phi,\psi \in \mathrm{B}(X)$ deux fonctions boréliennes bornées.

$$\int_{X\times X}\phi(x)\psi(y)\mathrm{d}\eta_{n,m}(x,y) = \sum_{h\in D} f_m(h)\int_{X\times X}\phi(hx)\psi(hy)\mathrm{d}\nu_n(x,y).$$

Mais pour tout $h \in D \subset \Gamma$, on a :

$$\int_{X\times X}\phi(hx)\psi(hy)\mathrm{d}\nu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \phi(x)\psi(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

par Γ-invariance de la mesure μ.
Ainsi, on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{X\times X}\phi(x)\psi(y)\mathrm{d}\eta_{n,m}(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \phi(x)\psi(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Ainsi, la seconde propriété est vérifiée dès que n tend vers l'infini, à m fixé.

Concentrons-nous maintenant sur la troisième propriété. Soit $\gamma \in \Gamma$. Pour tout $\phi \in \mathrm{B}(X\times X)$ avec $||\phi||_\infty = 1$, on a :

$$|\int_{x\in X\times X}\phi(\gamma.x) - \phi(x)\mathrm{d}\eta_{n,m}(x)| = |\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}(\phi(\gamma.(h.x)) - \phi(h.x))f_m(h)\mathrm{d}\nu_n(x)|.$$

Mais on peut écrire :

$$\sum_{h\in D}\phi(\gamma.(h.x))f_m(h) = \sum_{h\in D}\phi((\tilde{\gamma h}).(c(\gamma,h).x))f_m(h)$$

où $c(\gamma,h) \in \Lambda$. Ainsi, on obtient :

$$\sum_{h\in D}\phi(\gamma.(h.x))f_m(h)=\sum_{h\in D}\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(\gamma^{-1}\tilde{.}h).$$

On arrive finalement à :

$$\begin{aligned}&|\int_{x\in X\times X}\phi(\gamma.x)-\phi(x)\mathrm{d}\eta_{n,m}(x)|\\
=&|\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}\phi(hc(\gamma,\gamma\tilde{.}h).x)f_m(\gamma^{-1}\tilde{.}h)-\phi(h.x)f_m(h)\mathrm{d}\nu_n(x)|.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}&|\int_{x\in X\times X}\phi(\gamma.x)-\phi(x)\mathrm{d}\eta_{n,m}(x)|\\
\leqslant&|\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}(\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(\gamma^{-1}\tilde{.}h)-\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(h))\mathrm{d}\nu_n(x)|\\
&+|\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}(\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(h)-\phi(h.x)f_m(h))\mathrm{d}\nu_n(x)|,\end{aligned}$$

où le premier terme de la somme est :

$$\begin{aligned}&|\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}(\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(\gamma^{-1}\tilde{.}h)-\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(h))\mathrm{d}\nu_n(x)|\\
\leqslant&||\pi(\gamma)f_n-f_n||_1,\end{aligned}$$

et le second :

$$\begin{aligned}&|\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}(\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)f_m(h)-\phi(h.x)f_m(h))\mathrm{d}\nu_n(x)|\\
&=|\int_{x\in X\times X}\sum_{h\in D}(\phi(hc(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h).x)-\phi(h.x))f_m(h)\mathrm{d}\nu_n(x)|\\
&\leqslant\sum_{h\in D}||(k_{\gamma,h}\times k_{\gamma,h})_*\nu_n-\nu_n||f_m(h),\end{aligned}$$

avec $k_{\gamma,h}=c(\gamma,\gamma^{-1}\tilde{.}h)\in\Lambda$. On obtient alors :

$$||(\gamma\times\gamma)_*\eta_{n,m}-\eta_{n,m}||\leqslant||\pi(\gamma)f_m-f_m||_1+\sum_{h\in D}||(k_{\gamma,h}\times k_{\gamma,h})_*\nu_n-\nu_n||f_m(h).$$

Le premier terme de droite tend vers zero lorsque m tend vers l'infini. De plus, à m fixé, le second terme tend vers zero quand n tend vers l'infini.

On construit alors une suite (η_m) de mesures de probabilité satisfaisant les deuxième et troisième propriétés.

Enfin, puisque pour tout $n,m\in N$ on a $\eta_{n,m}(\Delta_X)=\nu_n(\Delta_X)$, la dernière propriété est aussi vérifiée pour la suite (η_m).

Nous obtenons ainsi une suite de mesures de probabilité (η_m) sur $X\times X$ nous permettant d'affirmer que l'action de Γ sur (X,μ) n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

□

Remarque 2.19. *On retrouve le fait que les actions de groupes moyennables n'ont jamais la propriété (T) relative à l'espace dans le cas où Γ est un groupe moyennable et Λ est réduit à l'identité.*

2.3.3 Co-induction

Soient $\Gamma_0 \subset \Gamma$ des groupes dénombrables. Soit $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ une action préservant la mesure de probabilité ayant la propriété (T) relative à l'espace. Nous pouvons construire une action de Γ dont la restriction à Γ_0 admet l'action initiale comme quotient : l'action co-induite.

Nous procédons de la manière suivante. Soit D un domaine fondamental pour l'action à droite de Γ_0 sur Γ. Sans perdre de généralité, on suppose que l'élément neutre appartient à D. Posons $(Y, \eta) = \prod_D (X, \mu)$ et considérons l'action de Γ sur (Y, η) donnée par :

$$\gamma y = \gamma(x_d)_d = (\sigma(\gamma^{-1}, d)^{-1} x_{\gamma^{-1}.d})_d$$

où l'action de Γ sur D donnée par $\Gamma \times D \to D, (\gamma, d) \mapsto \gamma.d$ provient du cocycle $\sigma : \Gamma \times D \to \Gamma_0$.

Proposition 2.20. *Soient $\Gamma_0 \subset \Gamma$ des groupes dénombrables. Soit $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ une action préservant la mesure de probabilité ayant la propriété (T) relative à l'espace.*
Les assertions suivantes sont équivalentes ;
(i) l'action co-induite $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace,
(ii) Γ_0 est d'indice fini dans Γ.

(i) ⇒ (ii) :

On procède par contraposée ; supposons que $[\Gamma : \Gamma_0] = \infty$.

Commençons par introduire la suite de mesures (ν_n) définie sur $X \times X$ par :

$$\nu_n := (1 - \frac{1}{n}) q_* \mu + \frac{1}{n} \mu \otimes \mu,$$

où $q : X \mapsto X \times X, x \mapsto (x, x)$.
Cette mesure est invariante par l'action diagonale de Γ_0 et vérifie $\nu_n(\Delta_X) = 1 - \frac{1}{n}$.
On considère alors sur $Y \times Y$ la suite de mesures de probabilité (ζ_n) définie par :

$$\zeta_n = \otimes_D \nu_n.$$

Cette suite de mesures vérifie immédiatement les conditions de la Proposition 2.1 pour l'action $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$. Pourtant, le produit étant infini, on a :

$$\zeta_n(\Delta_Y) = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, l'action co-induite $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

(ii) ⇒ (i) :

Supposons que l'action $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ ait la propriété (T) relative à l'espace.
Notons $m = [\Gamma : \Gamma_0] \in \mathbb{N}$ et $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$.

Soit $(\eta_n) \in \mathcal{M}(Y \times Y)$ une suite de mesure de probabilités vérifiant les propriétés de la Proposition 2.1 pour l'action $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$.
Pour conclure, il suffit de montrer que pour $i = 1, \ldots, m$, on a

$$q^i_* \eta_n(\Delta_X) \to 1,$$

où $q^i : Y \times Y \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X \times X$ est la projection sur la coordonnée d_i.

La suite de mesures $(q^i_* \eta_n) \in \mathcal{M}(X \times X)$ vérifie de manière évidente les deux premières propriétés de la Proposition 2.1. Puisque $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace, il nous reste à vérifier que cette suite vérifie aussi la troisième propriété.

Prenons alors $\gamma_0 \in \Gamma_0$. Soit $\varphi \in \mathrm{B}(X \times X)$. Pour tout $n \in N$, on a :

$$\begin{aligned}
(\gamma_0 \times \gamma_0)_*(q^i_* \eta_n)(\varphi) - q^i_* \eta_n(\varphi) &= \int_{x \in X \times X} (\varphi(\gamma_0.x) - \varphi(x)) \mathrm{d} q^i_* \eta_n(x) \\
&= \int_{(x_1, \ldots, x, \ldots, x_m) \in Y \times Y} (\varphi(\gamma_0.x) - \varphi(x)) \mathrm{d}\eta_n(x_1, \ldots, x, \ldots, x_q) \\
&= \int_{y \in Y \times Y} \psi(\gamma.y) - \psi(y) \mathrm{d}\eta_n(y)
\end{aligned}$$

où $\psi(y) = \psi(x_1, \ldots, x, \ldots, x_m) = \varphi(x)$ et $\gamma = d_i \gamma_0^{-1} d_i^{-1}$. De la sorte, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(\gamma_0 \times \gamma_0)_*(q^i_* \eta_n)(\varphi) - q^i_* \eta_n(\varphi)| &= |(\gamma \times \gamma)_* \eta_n(\psi) - \eta_n(\psi)| \\
&\leqslant ||(\gamma \times \gamma)_* \eta_n - \eta_n||.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite de mesures de probabilité $(q^i_* \eta_n)$ vérifie les propriétés de la Proposition 2.1 pour l'action $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$, et on a alors $q^i_* \eta_n(\Delta_X) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. L'action co-induite a donc la propriété (T) relative à l'espace.

□

Remarque 2.21. *La première implication nous permet de retrouver le fait que les actions de Bernoulli n'ont pas la propriété (T) relative à l'espace, dans le cas où Γ_0 est réduit à l'élément neutre.*

2.3.4 Induction

Une autre manière de passer d'une action p.m.p. d'un groupe Γ à un sur-groupe est de procéder de la manière suivante.

Soit G un groupe localement compact, à base dénombrable. Soit Γ un réseau de G (de sorte que G/Γ admet une mesure de probabilité G-invariante $\bar{\lambda}$). Donnons-nous une action sur un espace de probabilité standard $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ qui préserve la mesure de probabilité. On induit une action de G de la manière suivante.

Posons $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(X) = (G \times X)/\Gamma$ l'espace des classes d'équivalence dans $G \times X$ pour la relation d'équivalence $(g, x) \sim (g\gamma, \gamma^{-1}x)$, $\forall g \in G, x \in X, \gamma \in \Gamma$. L'action de G sur $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(X)$ est donnée par $g.[g', x] = [gg', x]$.

On identifie $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(X)$ comme espace mesuré avec $G/\Gamma \times X$ que l'on munit de la mesure de probabilité $\bar{\lambda} \otimes \mu$. Cette mesure est alors préservée par l'action G.

Plus précisément, soit D un domaine fondamental pour l'action à droite de Γ sur G. L'espace $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(X), \eta)$ peut être identifié à $(X \times D, \mu \otimes \lambda)$, où λ est la mesure de probabilité sur D obtenue à partir de la mesure $\bar{\lambda}$ sur G/Γ. L'action est alors donnée par :

$$g.(x,k) = (\sigma(g,k)x, g\tilde{.}k), \quad \text{for all } g \in G, x \in X, k \in D,$$

où $\sigma : G \times D \to \Gamma$ est le cocycle donné par $g\tilde{.}k := gk\sigma(g,k)^{-1} \in D$.

On définit la propriété (T) relative à l'espace dans le cadre d'actions de groupes localement compacts, à base dénombrable. Pour cela, on adapte la caractérisation purement ergodique donnée par Ioana à ce contexte.

Définition 2.22. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Une action préservant la mesure de probabilité $G \curvearrowright (X,\mu)$ sur un espace de probabilité standard sans atome (X,μ) a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si pour toute suite de mesures de probabilité boréliennes (ν_n) sur $X \times X$ satisfaisant :*

1. *$p^i_*\nu_n = \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1,2$, où $p^i : X \times X \to X$ désigne la projection sur la i-ème coordonnée,*
2. *$\int_{X\times X} \varphi(x)\psi(y)d\nu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \varphi(x)\psi(x)d\mu(x)$, pour toute fonction borélienne bornée φ, ψ sur X,*
3. *$||(g \times g)_*\nu_n - \nu_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $g \in G$,*

on a $\nu_n(\Delta_X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ où Δ_X désigne la diagonale dans $X \times X$.

Remarque 2.23. *On vérifie que la Proposition 2.18 reste valable dans le contexte de groupes localement compacts à base dénombrable en suivant mutadis mutandis les étapes de la démonstration. Rappelons que dans le cadre non dénombrable, la co-moyennabilité est définie de la manière suivante.*

Définition 2.24. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit $\bar{\lambda}$ une mesure quasi-G-invariante sur G/H.*
On dit que H est un sous-groupe co-moyennable s'il existe une suite (f_n) d'éléments de $L^1(G/H, \bar{\lambda})$ telles que

1. *$f_n \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$||f_n||_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
3. *$||\pi(g)f_n - f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $g \in G$, où $\pi(g)f_n(\bar{g}) = \frac{\mathrm{d}g_*\bar{\lambda}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}} f_n(g^{-1}\bar{g})$, pour tout $\bar{g} \in G/H$.*

Remarque 2.25. *De manière plus naturelle, la troisième propriété de la Définition 2.22 aurait pu être remplacée par*

$$\sup_{g\in K} ||(g \times g)_*\nu_n - \nu_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour toute partie compacte } K \subset G.$$

On vérifie que cette définition est équivalente à la précédente.

En effet, d'après la Remarque 2.23, la propriété (T) relative à l'espace pour l'action de G est équivalente à celle d'un réseau Γ. Mais pour les groupes discrets, les définitions sont clairement identiques.

De quelle manière lier la propriété (T) relative à l'espace de l'action initiale à l'action induite ? Nous donnons une réponse dans la proposition suivante.

Proposition 2.26. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Soit Γ un réseau de G. Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action préservant la mesure de probabilité. Considérons $G \curvearrowright (\mathrm{Ind}_\Gamma^G(X),\eta)$ l'action induite.*
Les affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) l'action induite $G \curvearrowright (\mathrm{Ind}_\Gamma^G(X),\eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace,
(ii) les actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $G \curvearrowright (G/\Gamma,\bar{\lambda})$ ont la propriété (T) relative à l'espace.

Remarque 2.27. *La propriété (T) relative à l'espace de l'action $G \curvearrowright (G/\Gamma,\bar{\lambda})$ est étudiée dans le Théorème 2.38.*

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) :
Supposons que l'action induite ait la propriété (T) relative à l'espace.
Commençons par montrer que l'action initiale $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace.
Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $X \times X$ et vérifiant :

1. $p^i_*\mu_n = \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1,2$, où $p^i : X \times X \to X$ désigne la projection sur la i-ème coordonnée,
2. $\int_{X\times X} \phi(x)\psi(y)d\mu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \phi(x)\psi(x)d\mu(x)$, pour toutes fonctions boréliennes bornées ϕ,ψ sur X
3. $||(\gamma\times\gamma)_*\mu_n - \mu_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$

Introduisons la suite de mesures de probabilité (ν_n) définies sur $(X\times D)^2$ par

$$\nu_n := \mu_n \otimes q_*\lambda,$$

où $q : D \to D \times D$, $k \mapsto (k,k)$. Cette suite vérifie les propriétés de la Définition 2.22 pour l'action induite de G.
En effet, pour le premier point, on vérifie directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout sous-ensemble borélien $A \subset X \times D$ on a :

$$p^i_*\nu_n(A) = \mu \otimes \lambda(A), \quad i = 1,2.$$

Pour la seconde propriété, soient $\phi,\psi \in B(X\times D)$.

$$\begin{aligned}\int_{(X\times D)^2} \phi(x,k)\psi(y,l)\mathrm{d}\nu_n(x,k,y,l) &= \int_{X^2\times D} \phi(x,k)\psi(y,k)\mathrm{d}\mu_n(x,y)\mathrm{d}\lambda(k)\\ &= \int_D\int_{X^2} \phi(x,k)\psi(y,k)\mathrm{d}\mu_n(x,y)\mathrm{d}\lambda(k),\end{aligned}$$

où pour tout $k \in D$,

$$\int_{X^2} \phi(x,k)\psi(y,k)\mathrm{d}\mu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \phi(x,k)\psi(x,k)\mathrm{d}\mu(x).$$

Puis, on obtient à l'aide du théorème de convergence dominée :

$$\int_{(X\times D)^2} \phi(x,k)\psi(y,l)\mathrm{d}\nu_n(x,k,y,l) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{X\times D} \phi(x,k)\psi(x,k)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda(k).$$

Enfin pour le dernier point, prenons $g \in G$ et $\phi \in \mathrm{B}((X \times D)^2)$ avec $||\phi||_\infty = 1$. On écrit :

$$|\int_{(x,k)\in(X\times D)^2} \phi(g.(x,k)) - \phi(x,k)\mathrm{d}\nu_n(x,k)| = |\int_{x\in X^2, k\in D} \phi(\sigma(g,k)x, g\tilde{.}k) - \phi(x,k)\mathrm{d}\mu_n(x)\mathrm{d}\lambda(k)|.$$

Pour $g \in G$ fixé, on dispose d'une application borélienne $\sigma_g : D \to \Gamma$, $k \mapsto \sigma(g, g^{-1}\tilde{.}k)$ dans un groupe dénombrable. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset \Gamma$ tel que

$$\lambda(\bigsqcup_{\gamma\notin F}\{k \in D \, : \, \sigma_g(k) = \gamma\}) < \varepsilon.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $F \subset \Gamma$ le sous-ensemble fini associé à ε. Par G-invariance de λ, on a :

$$\begin{aligned}
&|\int_{x\in X^2, k\in D} \phi(\sigma(g,k)x, g.k) - \phi(x,k)\mathrm{d}\mu_n(x)\mathrm{d}\lambda(k)| \\
&= |\int_{x\in X^2, k\in D} \phi(\sigma(g, g^{-1}\tilde{.}k)x, k) - \phi(x,k)\mathrm{d}\lambda(k)\mathrm{d}\mu_n(x)|
\end{aligned}$$

Ainsi, en décomposant D à l'aide de notre sous-ensemble fini F, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&|\int_{x\in X^2, k\in D} \phi(\sigma(g, g^{-1}\tilde{.}k)x, k) - \phi(x,k)\mathrm{d}\lambda(k)\mathrm{d}\mu_n(x)| \\
\leqslant & 2\varepsilon + \sum_{\gamma\in F}\int_{x\in X^2} |\int_{\sigma_{g^{-1}}(\{\gamma\})} \phi(\sigma(g, g^{-1}\tilde{.}k)x, k) - \phi(x,k)\mathrm{d}\lambda(k)|\mathrm{d}\mu_n(x) \\
\leqslant & 2\varepsilon + \sum_{\gamma\in F}\int_{x\in X^2} |\psi(\gamma x) - \psi(x)|\mathrm{d}\mu_n(x),
\end{aligned}$$

où $\psi(x) = \int_{\sigma_{g^{-1}}(\{\gamma\})} \phi(x,k)\mathrm{d}\lambda(k)$,

$$\leqslant \varepsilon + |F|\sup_{\gamma\in F}||(\gamma\times\gamma)_*\mu_n - \mu_n||$$

et le second terme tend vers zero quand n tend vers l'infini. Par conséquent, le troisième point de la Définition 2.22 est vérifié.
Ainsi $\nu_n(\Delta_{X\times D}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, puisque l'action induite de G a la propriété (T) relative à l'espace.
Finalement, on a $\mu_n(\Delta_X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, et l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace.

Montrons maintenant que l'action $G \curvearrowright (D, \lambda)$ a aussi la propriété (T) relative à l'espace.
Soit (λ_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $D \times D$ satisfaisant les conditions de la Définition 2.22 pour l'action $G \curvearrowright (D, \lambda)$.
Considérons la suite de mesures de probabilité (ν_n) définies sur $(X \times D)^2$ par

$$\nu_n := p_*\mu \otimes \lambda_n,$$

où $p : X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$.
On vérifie immédiatement que cette suite satisfait les deux premières propriétés de la Définition 2.22 pour l'action induite de G sur $X \times D$.
Pour ce qui est de la dernière, prenons $g \in G$ et $\phi \in \mathrm{B}((X \times D)^2)$ avec $||\phi||_\infty = 1$. On écrit :

$$
\begin{aligned}
&|\int_{(x,k,x',k')\in(X\times D)^2}\phi(g.(x,k,x',k'))-\phi(x,k,x',k')\mathrm{d}\nu_n(x,k)|\\
&=|\int_{x\in X,\,(k,k')\in D\times D}\phi(\sigma(g,k)x,g\tilde{.}k,\sigma(g,k')x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|.
\end{aligned}
$$

Pour $g\in G$ fixé, on dispose d'une application borélienne $\sigma_g : D\to\Gamma$, $k\mapsto\sigma(g,g^{-1}\tilde{.}k)$ dans un groupe dénombrable. Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un sous-ensemble fini $F\subset\Gamma$ tel que

$$\lambda(\bigsqcup_{\gamma\notin F}\{k\in D\,:\,\sigma_g(k)=\gamma\})<\varepsilon.$$

Soient $\varepsilon>0$ et $F\subset\Gamma$ le sous-ensemble fini associé à ε. On dispose des inégalités suivantes

$$
\begin{aligned}
&|\int_{x\in X,\,(k,k')\in D\times D}\phi(\sigma(g,k)x,g\tilde{.}k,\sigma(g,k')x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|\\
\leqslant&6\varepsilon+\sum_{\gamma\in F}|\int_{x\in X,\,(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})}\phi(\sigma(g,k)x,g\tilde{.}k,\sigma(g,k')x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|\\
&+\sum_{\gamma\neq\gamma'\in F}|\int_{x\in X,\,(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma'\})}\phi(\sigma(g,k)x,g\tilde{.}k,\sigma(g,k')x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|\\
\leqslant&6\varepsilon+\sum_{\gamma\in F}|\int_{(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})}\int_{x\in X}\phi(\gamma x,g\tilde{.}k,\gamma x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|\\
&+\sum_{\gamma\neq\gamma'\in F}|\int_{(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma'\})}\int_{x\in X}\phi(\gamma x,g\tilde{.}k,\gamma' x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|
\end{aligned}
$$

Il nous suffit de montrer que lorsque n tend vers l'infini, chacun des termes à droite de l'inégalité tend vers 0.
L'invariance de la mesure μ permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in F}|\int_{(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})}\int_{x\in X}\phi(\gamma x,g\tilde{.}k,\gamma x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|\\
=&\sum_{\gamma\in F}|\int_{(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})}\psi(g\tilde{.}k,g\tilde{.}k')-\psi(k,k')\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|
\end{aligned}
$$

où $\psi(k,k')=\int_{x\in X}\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)$. Puisque l'on a une somme fini, ce terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après les propriétés vérifiées par la suite (λ_n). Quant au dernier terme, on dispose de la majoration suivante

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\neq\gamma'\in F}|\int_{(k,k')\in\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})\times\sigma_g^{-1}(\{\gamma'\})}\int_{x\in X}\phi(\gamma x,g\tilde{.}k,\gamma' x,g\tilde{.}k')-\phi(x,k,x,k')\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|\\
\leqslant&\sum_{\gamma\neq\gamma'\in F}2|\int_{(k,k')\in D\times D}\mathbb{1}_{\sigma_g^{-1}(\{\gamma\})}(k)\mathbb{1}_{\sigma_g^{-1}(\{\gamma'\})}(k')\mathrm{d}\lambda_n(k,k')|
\end{aligned}
$$

De même, puisque l'on considère une somme finie, ce terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après les propriétés vérifiées par la suite (λ_n).

La troisième propriété de la Définition 2.22 est ainsi satisfaite pour l'action induite de G sur $X \times D$. Par conséquent, $\nu_n(\Delta_{X\times D}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, $\lambda_n(\Delta_D) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, et l'action $G \curvearrowright (D,\lambda)$ a la propriété (T) relative à l'espace.

<u>**(ii) ⇒ (i)**</u> **:**
Supposons maintenant que les actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $G \curvearrowright (D,\lambda)$ aient la propriété (T) relative à l'espace.
Nous souhaitons montrer que l'action induite $G \curvearrowright (X\times D, \mu\otimes\lambda)$ a la propriété (T) relative à l'espace.

Soit (ν_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $(X\times D)^2$ vérifiant les propriétés de la Définition 2.22 pour l'action induite.
Commençons par considérer la suite de mesures de probabilité $(\lambda_n) = (p^D_*\nu_n)$ dans $\mathcal{M}(D\times D)$, où $p^D : (X\times D)^2 \to D\times D$ est la projection sur les coordonnées $D\times D$.
On vérifie immédiatement que cette suite de mesures satisfait les propriétés de la Définition 2.22 pour l'action de G sur (D,λ). Puisque cette action a la propriété (T) relative à l'espace, on a $\lambda_n(\Delta_D) = \nu_n(X\times X\times\Delta_D) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'autre part, introduisons la suite de mesures de probabilité $(\mu_n) = (p^X_*\nu_n)$ dans $\mathcal{M}(X\times X)$, où $p^X : (X\times D)^2 \to X\times X$ est la projection sur les coordonnées $X\times X$.
Les deux premières propriétés de la Définition 2.22 pour l'action de Γ sur X sont immédiatement vérifiées.
Pour ce qui est de la troisième propriété de cette définition, soient $\gamma\in\Gamma$ et $\phi\in \mathrm{B}(X\times X)$ avec $||\phi||_\infty = 1$.
On écrit :

$$|\int_{x\in X\times X}\phi(\gamma x)-\phi(x)\mathrm{d}\mu_n(x)| = |\int_{(x,k)\in(X\times D)^2}\phi(\gamma x)-\phi(x)\mathrm{d}\nu_n(x,k)|.$$

Puisque G est séparable, il existe une suite dense (g_n) d'éléments de G. A un ensemble de mesure nulle près, on peut écrire

$$D = \bigcup_i D_{g_i}$$

où $D_{g_i} = \{d\in D : \sigma(g_i,d)=\gamma\}$. On utilise pour obtenir cette expression le fait que Γ est discret, et donc que D et D_{g_i} sont d'intérieurs non vide pour tout i.
On construit alors par récurrence une partition mesurable $D = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}^*} U_i$, où $U_1 = D_1$ et pour tout $i > 2$, $U_i = D_i\setminus\bigcup_{j<i} D_j$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ensemble fini $F\subset\mathbb{N}^*$ tel que

$$\lambda(\bigsqcup_{i\notin F} U_i) < \epsilon.$$

On pose $\psi(x) = \phi(\gamma x)-\phi(x)$, $A = \bigsqcup_{i\in F} U_i$ et $B = \bigsqcup_{i\notin F} U_i$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}|\int_{(X\times D)^2}\psi(x)\mathrm{d}\nu_n(x,k)| &\leqslant \int_{X^2\times A\times A}|\psi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k) + \int_{X^2\times A\times B} 2\,\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\ &\quad + \int_{X^2\times B\times A} 2\,\mathrm{d}\nu_n(x,k) + \int_{X^2\times B\times B} 2\,\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\ &\leqslant \int_{X^2\times A\times A}|\psi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k) + 6\varepsilon.\end{aligned}$$

De plus, on dispose des inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\int_{X^2\times A\times A} |\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\
=&\sum_{i\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_i} |\phi(\sigma(g_i,k)x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)+\sum_{i\neq j\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_j}|\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\
\leqslant&\sum_{i\in F}\int_{(X\times D)^2} |\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)-\phi(x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)+\sum_{i\neq j\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_j}|\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k),
\end{aligned}
$$

puis en écrivant :

$$
\begin{aligned}
&\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)-\phi(x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)\\
=&\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)-\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(g_i\tilde{.}k)+\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(g_i\tilde{.}k)-\phi(x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k),
\end{aligned}
$$

on obtient les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\leqslant&\sum_{i\in F}\int_{(X\times D)^2} |\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(g_i\tilde{.}k)-\phi(x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\
&+\sum_{i\in F}\int_{(X\times D)^2}|\phi(\sigma(g_i,k)x)||\mathbf{1}_{U_i^2}(g_i\tilde{.}k)-\mathbf{1}_{U_i^2}(k)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)+\sum_{i\neq j\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_j}|\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\
\leqslant&\sum_{i\in F}\int_{(X\times D)^2} |\phi(\sigma(g_i,k)x)\mathbf{1}_{U_i^2}(g_i\tilde{.}k)-\phi(x)\mathbf{1}_{U_i^2}(k)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\
&+\sum_{i\in F}\int_{(X\times D)^2}|\mathbf{1}_{U_i^2}(g_i\tilde{.}k)-\mathbf{1}_{U_i^2}(k)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)+\sum_{i\neq j\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_j}|\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\\
\leqslant&2|F|\sup_{i\in F}||(g_i\times g_i)_*\nu_n-\nu_n||+\sum_{i\neq j\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_j}|\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)
\end{aligned}
$$

Montrons que les termes à droite de l'inégalité tendent vers zero quand n tend vers l'infini.
Concernant le premier terme, c'est une conséquence directe de la troisième propriété de la Définition 2.22 vérifiée par ν_n.
Pour ce qui est du second terme, la deuxième propriété vérifiée par ν_n nous donne :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\neq j\in F}\int_{X^2\times U_i\times U_j}|\phi(\gamma x)-\phi(x)|\mathrm{d}\nu_n(x,k)\leqslant&2\sum_{i\neq j\in F}\int_{(x,k,y,l)\in(X\times D)^2}\mathbf{1}_{X\times U_i}(x,k)\mathbf{1}_{X\times U_j}(y,l)\mathrm{d}\nu_n(x,k,y,l)\\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2\int_{X\times D}\mathbf{1}_{X\times U_i}(x,k)\mathbf{1}_{X\times U_j}(x,k)\mathrm{d}\mu\otimes\lambda(x,k)=0
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $||(\gamma\times\gamma)_*\mu_n-\mu_n||\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
A l'aide de la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\Gamma\curvearrowright(X,\mu)$, on obtient

$$\mu_n(\Delta_X)=\nu_n(\Delta_X\times D\times D)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

Finalement, puisque $\nu_n(\Delta_X\times D\times D)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$ et $\nu_n(X\times X\times\Delta_D)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$, on arrive à

$$\nu_n(\Delta_{X\times D})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

L'action induite $G \curvearrowright (X \times D, \mu \otimes \lambda)$ a donc la propriété (T) relative à l'espace. Ce qui achève la démonstration.

□

Considérons maintenant la situation plus générale suivante, liée à la notion d'équivalence mesurable.

Soit (E, λ) un espace mesuré. Soient Γ et Δ des groupes dénombrables. Supposons que l'on dispose d'actions libres commutant de Γ et Δ sur (E, λ) qui préservent la mesure λ. Supposons qu'il existe un domaine fondamental de mesure finie Ω pour l'action de Δ sur E tel que l'on ait de plus $E = \Gamma\Omega$. On définit une action de Γ sur $(\Omega, \bar{\lambda}) \cong (E/\Delta, \lambda)$ à l'aide du cocycle $\sigma : \Gamma \times \Omega \to \Delta$.

Soit (X, μ) un espace de probabilité standard et soit $\Delta \curvearrowright (X, \mu)$ une action p.m.p.. On peut définir une action de Γ sur $(X \times \Omega, \mu \times \bar{\lambda})$ par :

$$\gamma.(x, \omega) = (\sigma(\gamma, \omega).x, \gamma.\omega), \quad \text{pour tous } \gamma \in \Gamma, x \in X, \omega \in \Omega.$$

Notons cette action $\Gamma \curvearrowright (\mathrm{Ind}_\Delta^E(X), \eta)$.

On dispose du résultat suivant dont la démonstration est similaire à celle de la Proposition 2.26.

Proposition 2.28. *Soit $\Delta \curvearrowright (X, \mu)$ une action p.m.p. libre ayant la propriété (T) relative à l'espace. Supposons que l'action $\Gamma \curvearrowright (\Omega, \bar{\lambda})$ ait la propriété (T) relative à l'espace.*
Alors, l'action induite $\Gamma \curvearrowright (\mathrm{Ind}_\Delta^E(X), \eta)$ est libre et a la propriété (T) relative à l'espace.

Remarque 2.29. *Cette induction nous permet alors de construire des actions libres de Γ.*

2.4 Critère de rigidité pour les actions sur des espaces homogènes

Dans cette section, on étudie les actions par transformations affines sur des espaces homogènes G/Λ de groupes de Lie p-adiques G quotientés par un réseau Λ.

Nous donnons un critère simple pour que de telles actions aient la propriété (T) relative à l'espace. Ce critère s'avérera fort pratique pour les applications que nous avons en vue dans le chapitre suivant. Il prolonge les travaux de Burger sur les actions par automorphismes [Bur91], et ceux de Ioana et Shalom sur les actions par translations [IS13].

Nous commençons par rappeler quelques résultats qui ont orienté nos recherches, ainsi que quelques définitions nécessaires à la compréhension du résultat principal de cette section : le Théorème 2.32.

2.4.1 Rappels

Comme nous l'avons déjà énoncé, Burger étudie dans son article [Bur91] la propriété (T) relative pour des paires de groupes de la forme $(A \rtimes \Gamma, A)$, où A est un groupe discret abélien et Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A)$. Il donne une condition suffisante sur l'action duale de Γ sur $\hat{A}$ pour que la paire $(A \rtimes \Gamma, A)$ ait la propriété (T) relative. Dans le cas où $A = \mathbb{Z}^n$ et Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, on obtient une action sur le n-tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Son résultat s'écrit alors :

Théorème 2.30 ([Bur91]). *La paire $(\mathbb{Z}^n \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^n)$ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement s'il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur l'espace projectif $\mathbb{P}((\mathbb{R}^n)^*)$.*

Le fait que la condition ci-dessus soit nécessaire est démontré dans la Proposition 3.1.9 [dC06], qui repose elle-même sur le Lemme de Furstenberg [Fur76].

Par conséquent, l'action par automorphismes $\Gamma \curvearrowright (\mathbb{T}^n, \mu)$ d'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement s'il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part, Ioana et Shalom étudient dans [IS13] la propriété (T) relative à l'espace pour des actions par translations sur un espace homogène d'un groupe algébrique réel.

Voici l'un de leurs résultats qui donne des conditions simples pour que de telles actions aient la propriété (T) relative à l'espace.

Théorème 2.31 ([IS13], Théorème D). *Soit G un groupe algébrique réel et Λ un réseau de G. Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe dénombrable. Notons H l'adhérence de Zariski de Γ. Supposons que H n'ait ni de sous-groupe algébrique distingué co-compact propre, ni de morphisme non-trivial à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Soit η une mesure de probabilité sur G/Λ invariante par Γ.*
Si le centre de Γ (ou de manière équivalente, de H) dans G est fini, alors l'action par translations de Γ sur $(G/\Lambda, \eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace.
Dans le cas où $\eta = m_{G/\Lambda}$, la réciproque est vérifiée : si l'action $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \eta)$ a la propriété (T) relative à l'espace, alors le centre de Γ dans G est fini.

Nous nous proposons de prolonger ces deux résultats au cadre d'actions par transformations affines sur des espaces homogènes de groupes de Lie p-adiques, $p \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Rappelons quelques définitions (voir [Bou72]).

On adopte les notations suivantes. Soit G un groupe de Lie p-adique et soit Λ un réseau de G. Notons $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes continus de G et $\mathrm{Aut}_\Lambda(G)$ le sous-groupe des éléments $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ vérifiant $\sigma(\Lambda) = \Lambda$. Posons $\mathrm{Aff}(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ et

$$\mathrm{Aff}_\Lambda(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}_\Lambda(G).$$

Le groupe des transformations affines de G/Λ, $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$, agit naturellement sur G/Λ. De plus, toute mesure de probabilité G-invariante sur G/Λ est aussi invariante par $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$.

Enfin, l'action linéaire de $\mathrm{Aff}(G)$ sur $\mathfrak{g}$ induit une action sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal, démontré à la section 2.4.3.

Théorème 2.32. *Soit G un groupe de Lie p-adique ou réel, $p \in \mathcal{P}$. Soit $\Lambda \subset G$ un réseau et soit μ la mesure de probabilité G-invariante sur l'espace homogène correspondant G/Λ. Soit Γ un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace ;
(ii) il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$;
(iii) la paire de groupes $(\mathfrak{g}^* \rtimes \Gamma, \mathfrak{g}^*)$ a la propriété (T) relative.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'établir quelques résultats nous permettant de lier l'action sur G/Λ à celle sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Notons que nous pouvons élargir le cadre d'application de ce critère à des produits de groupes de Lie p-adiques.

Soit S un sous-ensemble fini de l'union de $\{\infty\}$ avec l'ensemble des nombres premiers. Soit G un groupe de la forme :

$$\prod_{p\in S} G_p$$

où pour chaque $p \in S$, G_p est un groupe de Lie p-adique, le cas ∞-adique correspondant à un groupe de Lie réel. L'algèbre de Lie de G

$$\mathfrak{g} := \oplus_{p\in S}\mathfrak{g}_p$$

est la somme directe des algèbres de Lie $\mathfrak{g}_p$ de G_p. Soit $\Lambda \subset G$ un réseau de la forme

$$\prod_{p\in S} \Lambda$$

où pour chaque $p \in S$, Λ_p est un réseau de G_p. On note μ la mesure de probabilité G-invariante sur l'espace homogène correspondant G/Λ.

On déduit le résultat suivant du Théorème 2.32 et de la Proposition 2.15.

Théorème 2.33. *Soit Γ un sous-groupe dénombrable de $\prod_{p\in S} \mathrm{Aff}_{\Lambda_p}(G_p)$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ *a la propriété (T) relative à l'espace ;*
(ii) *pour tout $p \in S$, il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_p)$.*

2.4.2 Lemmes préliminaires

Commençons par rappeler le lemme suivant qui apparaît dans [IS13].

Lemme 2.34 ([IS13])**.** *Soit (X, μ) un espace de probabilité standard.*
Soit $c > 0$ et soit (η_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $X \times X$ et vérifiant les propriétés :

— $p^i_*(\eta_n) \leqslant c\mu$*, pour $i = 1, 2$, où $p^i : X \times X \to X$ est la projection sur la i-ème coordonnée*

— $\eta_n(\Delta_X) = 0$*, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

— $\eta_n(A \times (X\backslash A)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, pour tout sous-ensemble borélien A de X.*

Alors, pour toute partition borélienne $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ de X, on a

$$\eta_n\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times A_i)\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Démonstration :

Pour $k \geqslant 1$, posons $X_k = \cup_{i=1}^{k} A_i$. On remarque que

$$(X \times X) \backslash \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \times A_i) \subset \cup_{i=1}^{k} (A_i \times (X \backslash A_i)) \cup ((X \backslash X_k) \times X).$$

Par ailleurs pour $i = 1, 2$, on a $\eta_n(A_i \times (X \backslash A_i)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et $p_*^1(\eta_n) \leqslant c\mu$. On en déduit que

$$\limsup_{n \to \infty} \eta_n((X \times X) \backslash \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \times A_i)) \leqslant c\mu(X \backslash X_k)\,, \forall k \geqslant 1.$$

Puisque les $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ forment une partition de X, on a $\mu(X_k) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui achève la démonstration.

□

Notre deuxième Lemme est une généralisation du Lemme F [IS13].

Le cadre pour ce résultat et le reste de cette section est le suivant. Soit G un groupe de Lie p-adique ou réel. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $p : \mathfrak{g} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ la projection canonique sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

Soit $q : G \to \mathfrak{g}$ une application borélienne égale au logarithme sur un voisinage U de l'identité. Définissons $r : (G \times G) \backslash \Delta \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

De même que dans [IS13], nous introduisons l'application

$$\rho \; : \; (G \times G) \backslash \Delta \to \mathbb{P}(\mathfrak{g}), \, \rho(x, y) = p(q(r(x, y))).$$

On note Ad: $G \to GL(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ de même que l'action associée $G \to$Aut$(\mathbb{P}(\mathfrak{g}))$ de G sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Rappelons que le groupe affine Aff(G) est le produit semi-direct $G \rtimes$ Aut(G). L'action associée de Aff(G) sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ est donnée pour tout $\gamma = (g, \sigma) \in$ Aff(G) et pour tout $Y \in \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ par :

$$\gamma.\bar{Y} = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{d}\sigma_e(\bar{Y}),$$

où dσ_e est l'automorphisme dérivé en l'identité de σ.

Le Lemme F de [IS13] s'adapte à ce contexte sous la forme suivante.

Lemme 2.35. *Soit X un sous-ensemble borélien de G, et soit μ une mesure de probabilité sur X. Soit $c > 0$, et soit (η_n) une suite de mesures de probabilité définies sur $X \times X$ satisfaisant :*

- $p_*^1(\eta_n) \leqslant c\mu$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\eta_n(\Delta_X) = 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\eta_n(A \times (X \backslash A)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, *pour tout sous-ensemble borélien A de X.*

Soient Λ un sous-groupe dénombrable de G, $\varphi : X \to \Lambda$ une application borélienne et $\gamma = (g, \sigma) \in$Aff(G) où $g \in G$ et $\sigma \in$ Aut(G).
Posons

$$D_\gamma = \{(x, y) \in (X \times X) \backslash \Delta_X \,|\, \rho(\gamma(x)\varphi(x), \gamma(y)\varphi(y)) = \gamma.(\rho(x, y))\}.$$

Alors

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n(D_\gamma) = 1.$$

Démonstration :

Par définition de q et de la représentation adjointe Ad de G, on peut trouver un voisinage V de l'identité e dans G tel que :

$$q(g\sigma(x)g^{-1}) = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{d}\sigma_e(q(x)), \quad \text{pour tout } x \in V.$$

Posons $A = \{(x, y) \in X \times X \mid xy^{-1} \in V\}$.

Soit W un voisinage de l'identité tel que $WW^{-1} \subset V$. Puisque G est séparable, il existe une suite (h_i) d'éléments de G telle que

$$G = \cup_{i=1}^{\infty} Wh_i.$$

Pour tout $i \geqslant 1$, notons

$$A_i = (Wh_i \backslash (\bigcup_{j=1}^{i-1} Wh_j)) \cap X.$$

Alors $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ est une partition borélienne de X. Puisque $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times A_i) \subset A$, le Lemme 2.34 implique que $\eta_n(A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Posons $B = \{(x, y) \in X \times X \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$.

On écrit X comme partition dénombrable

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{x \mid \varphi(x) = \lambda\}.$$

Le Lemme précédent nous donne encore une fois

$$\eta_n(B) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrons que l'on a $A \cap B \subset D_\gamma \cup \Delta_X$.

Pour cela, prenons $(x, y) \in A \cap B$ avec $x \neq y$. Puisque $(x, y) \in B$, on a par définition de ρ

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma(x)\varphi(x), \gamma(y)\varphi(y)) &= \rho(\gamma(x)\varphi(x), \gamma(y)\varphi(x)) \\
&= p(q(\gamma(x)\varphi(x)\varphi(x)^{-1}\gamma(y)^{-1})) \\
&= p(q(\gamma(xy^{-1}))) \\
&= p(q(g\sigma(xy^{-1})g^{-1})).
\end{aligned}$$

Puisque $(x, y) \in A$, on a $xy^{-1} \in V$ et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma(x)\varphi(x), \gamma(y)\varphi(y)) &= p(\mathrm{Ad}(g)\mathrm{d}\sigma_e(q((xy^{-1})))) \\
&= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{d}\sigma_e(\rho(x, y)) \\
&= \gamma.\rho(x, y).
\end{aligned}$$

Comme on a $\eta_n(A \cap B) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\eta_n(\Delta_X) = 0$, on obtient finalement $\eta_n(D_\gamma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Ce qui achève la démonstration.

□

Remarque 2.36. *Ce Lemme nous permet de faire le lien entre l'action double d'un groupe Γ par transformations affines sur l'espace $G/\Lambda \times G/\Lambda$ et l'action sur l'espace projectif de l'algèbre de Lie associé $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$. On démontre ainsi que l'absence de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ implique la propriété (T) relative à l'espace de l'action $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$.*

2.4.3 Démonstration du Théorème 2.32

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.32, dont l'approche nous a été inspirée par [IS13]. L'équivalence entre (ii) et (iii) découle de la Proposition 3.1.9 de [dC06]. On se concentre donc sur l'équivalence entre (i) et (ii).

On procède par contraposée, et l'on va donc s'intéresser à l'équivalence entre les deux assertions suivantes.
(i') $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace,
(ii') il existe une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.
Démonstration de (i') $\Leftrightarrow$ (ii') :

(i') $\Rightarrow$ (ii') : Supposons que l'action $\Gamma \curvearrowright (G/\Lambda, \mu)$ n'ait pas la propriété (T) relative à l'espace.

Soit $X \subset G$ un domaine fondamental pour l'action à droite de Λ sur G.
Comme indiqué précédemment, $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$ agit de manière naturelle sur G/Λ. Ceci nous permet de définir une action de $\mathrm{Aff}_\Lambda(G)$ sur X en posant :

$$\gamma.x = g\sigma(x)\omega(\gamma, x) \quad \text{pour } x \in X,\ \gamma = (g, \sigma) \in \mathrm{Aff}(G/\Lambda),$$

où $\omega(\gamma, x)$ est l'unique élément de Λ vérifiant $g\sigma(x)\omega(\gamma, x) \in X$.
Rappelons que $\mathrm{B}(X)$ désigne l'algèbre des fonctions mesurables bornées sur X.

Puisque l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace, il existe une suite de mesures de probabilité (ν_n) définies sur $X \times X$ avec les propriétés suivantes :

1. $p^i_* \nu_n = \mu$, pour tout n et $i = 1, 2$,
2. $\int_{X\times X} f(x)g(y)\mathrm{d}\nu_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu$, pour tout $f, g \in \mathrm{B}(X)$,
3. $\| (\gamma \times \gamma)_* \nu_n - \nu_n \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$,
4. $\liminf\limits_{n\to\infty} \nu_n(\Delta_X) < 1$.

Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $c = \inf_{n\in\mathbb{N}} c_n > 0$, où $c_n = 1 - \nu_n(\Delta_X)$.
On définit une suite de mesures de probabilité (η_n) sur $X \times X$ par :

$$\eta_n(A) = \frac{1}{c_n}\nu_n(A \backslash \Delta_X), \quad \text{pour tout sous-ensemble borélien } A \subset X \times X.$$

La première propriété implique que :

$$p^1_* \eta_n \leqslant \frac{1}{c}\mu, \quad \text{pour tout } n.$$

Quant à la limite $\eta_n(A \times (X\backslash A)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout sous-ensemble borélien $A \subset X$, elle découle de propriété 2. appliquée à $f \equiv \mathbb{1}_A$ et $g \equiv \mathbb{1}_{X\backslash A}$.
Soit $\gamma \in \Gamma$. Posons $\varphi \equiv \omega(\gamma, .)$ où $\omega(\gamma, .) : X \to \Lambda$, $x \mapsto \omega(\gamma, x)$ est la cocycle borélien défini plus haut. Le lemme précédent nous donne :

$$\eta_n(\{(x,y) \in (X \times X)\backslash \Delta_X \,|\, \rho(\gamma.x, \gamma.y) = \gamma.(\rho(x,y))\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \quad (*)$$

D'autre part, la troisième propriété nous permet d'affirmer que :

$$\| (\gamma \times \gamma)_* \eta_n - \eta_n \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Considérons la suite de mesures de probabilité définies sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ par $(\zeta_n) = (\rho_* \eta_n)$. On déduit de $(*)$ que l'on a :

$$\| \gamma_* \zeta_n - \zeta_n \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \quad (**)$$

De plus, puisque $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ est un espace métrique compact, l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathfrak{g}))$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$, muni de la topologie faible-$*$, est un espace compact métrisable. Ainsi, quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que (ζ_n) converge vers une mesure de probabilité ζ définie sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.
Enfin, $(**)$ nous permet d'affirmer que ζ est γ-invariant. Puisque cela est vérifié pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a bien trouvé une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

(ii') $\Rightarrow$ (i') : Supposons maintenant qu'il existe une mesure de probabilité Γ-invariante ζ définie sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

D'après la Proposition 2.18, on sait que l'action de Γ sur (X, μ) a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si l'action de $[\Gamma, \Gamma]$ sur (X, μ) a la propriété (T) relative à l'espace. Par conséquent, on peut supposer que $\Gamma \subset \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$.
Nous allons maintenant distinguer deux cas, suivant la compacité de l'adhérence de Hausdorff de Γ dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$.

Premier cas : Supposons que $K := \overline{\Gamma}$ soit compacte.
Soit λ la mesure de Haar normalisée sur K. Soit $Y \in \mathfrak{g} \backslash \{0\}$ pris dans un voisinage de 0 de sorte que $x_n = \exp(Y/n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Considérons la suite de mesures de probabilité (η_n) définies sur $X \times X$ par :

$$\eta_n(\varphi) = \int_K \int_X \varphi(x, k(x_n)x) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\lambda(k), \quad \forall \varphi \in \mathrm{B}(X \times X),$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $k(x_n) := \exp(k(Y/n))$ et on a $\lim_{n \to \infty} k(x_n) = e$ avec $k(x_n) \neq e$ pour tout $n \geqslant 1$.
On vérifie immédiatement que la suite (η_n) satisfait les trois propriétés de la Proposition 2.1 (elle est même Γ-invariante). D'autre part, $\eta_n(\Delta_X) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi, l'action n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

Deuxième cas : Supposons que l'image de Γ dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ ne soit pas bornée.
Puisque ζ est une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$, on peut affirmer d'après le Lemme de Furstenberg qu'il existe un sous-groupe d'indice fini Γ_0 de Γ qui fixe un sous-espace propre $V_0 \subset \mathfrak{g}$.

Une fois encore, nous distinguons deux cas. Si $\Gamma_0 \subset \mathrm{GL}(V_0)$ est bornée, on applique notre premier cas avec $K_0 := \overline{\Gamma_0} \subset \mathrm{GL}(V_0)$; l'action de Γ_0 sur X n'a pas la propriété (T) relative à l'espace. La Proposition 2.18 montre alors que l'action de Γ sur (X, μ) n'a pas la propriété (T) relative à l'espace non plus.

Supposons maintenant que W_1 soit une droite. Alors, $[\Gamma_1, \Gamma_1]$ a un point fixe non trivial Y dans $\mathfrak{g}$, et l'action $[\Gamma_1, \Gamma_1] \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

En effet, quitte à considérer des entiers suffisamment grands, on peut considérer que la suite $(x_n) = (\exp(Y/n))$ est définie pour $n \geqslant 1$. Alors, $x_n \in G$ est fixé par $[\Gamma_1, \Gamma_1]$ pour tout $n \geqslant 1$. Puisque $x_n \to e$ et $x_n \neq e$ pour n suffisamment grand, et comme Λ est discret, on peut supposer que $x_n \notin \Lambda$ pour tout $n \geqslant 1$.
Introduisons l'application

$$\begin{aligned} p_n : G/\Lambda &\to G/\Lambda \times G/\Lambda \\ x &\mapsto (x, x_n x) \end{aligned}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et posons $\eta_n = p_n^* \mu$, où on rappelle que μ est la mesure de probabilité G-invariante sur G/Λ provenant de la mesure de Haar de G. Alors η_n est une suite de mesures de probabilité sur $G/\Lambda \times G/\Lambda$ qui satisfait les trois propriétés de la Proposition 2.1 (η_n est même Γ-invariante). Néanmoins, $\eta_n(\Delta_X) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi, l'action $[\Gamma_1, \Gamma_1] \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.
Mais puisque $[\Gamma_1, \Gamma_1]$ est un sous-groupe co-moyennable de Γ, l'action de Γ sur (X, μ) n'a pas la propriété (T) relative à l'espace non plus.

Dans tous les cas, l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

□

Remarque 2.37. 1. *La démonstration de l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ du Théorème 2.32 montre que cette implication est vérifiée lorsque l'on remplace μ par toute mesure de probabilité sans atome Γ-invariante sur l'espace homogène G/Λ.*

2. *Dans le cadre d'actions par translations, la propriété (T) relative à l'espace de l'action de Γ sur G/Λ est indépendante du réseau Λ.*

Concentrons-nous maintenant sur le cas particulier des actions par translations, et commençons par étudier le cas des groupes algébriques réels.

Soit G un groupe algébrique réel connexe. Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe dénombrable. Notons $H = \overline{\Gamma}^{Zar}$ l'adhérence de Zariski réelle de Γ dans G.

Soit R le radical moyennable de H. Il existe un groupe semi-simple sans facteur compact S tel que $H = SR$. Le groupe H agit sur son algèbre de Lie par la représentation adjointe $H \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}, (h, X) \mapsto \mathrm{Ad}(h)(X)$. On la notera plus simplement $(h, X) \mapsto h.X$.

Le cadre réel a ceci de particulier que toute mesure de probabilité Γ-invariante sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathfrak{h})$ est aussi H-invariante, puisque les stabilisateurs de mesures sont alors algébriques [Zim84]. Cette particularité va nous permettre de préciser le Théorème précédent.

Théorème 2.38. *Soit Λ un réseau de H et μ la mesure de probabilité H-invariante sur H/Λ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action $\Gamma \curvearrowright (H/\Lambda, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace ;
(ii) $\bigcap_{h \in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}} := \{X \in \mathfrak{h} : hsh^{-1}.X = X$ pour tout $s \in S$ et pour tout $h \in H\} = \{0\}$;
(iii) le plus grand sous-groupe distingué connexe de H contenu dans R et centralisant S est trivial.

Démonstration :

Commençons par remarquer que $\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}}$ est le plus grand idéal de $\mathfrak{h}$ contenu dans $\ker \mathrm{ad}(\mathfrak{s})$ où $\mathfrak{s}$ est l'algèbre de Lie de S.
Le sous-groupe de Lie correspondant à $\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}}$ est le plus grand sous-groupe distingué connexe de H contenant R et centralisant S. Ce qui démontre que les deux derniers points sont équivalents.

D'après le Théorème 2.32, la condition (i) est équivalente à l'absence de mesure de probabilité Γ-invariante sur l'espace projectif.

On procède par contraposée, et l'on va donc s'intéresser à l'équivalence
(i') il existe une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$,
(ii') $\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}} \neq \{0\}$.

(i') $\Rightarrow$ (ii') : Supposons qu'il existe une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{h})$. Elle est aussi H-invariante.

Soit $h \in H$. Puisque hSh^{-1} est semi-simple et sans facteur compact, et comme μ est hSh^{-1}-invariante, son support $\mathrm{supp}(\mu)$ est contenu dans $\mathbb{P}(\mathfrak{h}^{hSh^{-1}})$. Mais alors, $\mathrm{supp}(\mu)$ est contenu dans $\mathbb{P}(\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}})$ et ainsi
$$\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}} \neq \{0\}.$$

(ii') $\Rightarrow$ (i') : Supposons maintenant que
$$\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}} \neq \{0\}.$$

Commençons par observer que $\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}}$ est H-invariant. Ainsi, puisque R est moyennable, il existe une mesure de probabilité R-invariante sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}})$. Mais S agissant trivialement sur $\bigcap_{h\in H} \mathfrak{h}^{hSh^{-1}}$, cette mesure de probabilité est H-invariante et a fortiori Γ-invariante.

□

Donnons maintenant quelques exemples d'applications directes de ce dernier résultat. On se place dans le même cadre et on garde les mêmes notations.

Exemple 2.39. *Si H est semi-simple et sans facteur compact, alors, pour tout réseau Λ dans H, l'action $\Gamma \curvearrowright H/\Lambda$ a la propriété (T) relative à l'espace.*

Exemple 2.40. *Pour $n \geqslant 2$, soient $H = \mathbb{R}^n \rtimes SL_n(\mathbb{R})$ et Λ un réseau de H. Alors, pour tout sous-groupe Γ Zariski-dense de H, l'action $\Gamma \curvearrowright H/\Lambda$ a la propriété (T) relative à l'espace.*

Exemple 2.41. *Pour $n \geqslant 2$, soit $H = M_n(\mathbb{R}) \rtimes (SL_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R}))$, où l'action de $SL_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$ est donnée par $((s,k), A) \mapsto sAk^{-1}$. Soit Λ un réseau de H. Alors, pour tout sous-groupe Γ Zariski-dense de H, l'action $\Gamma \curvearrowright H/\Lambda$ a la propriété (T) relative à l'espace.*

Exemple 2.42. *Si maintenant $H = S \times R$ avec S simple non compact et R groupe de Lie moyennable non discret, alors pour tout sous-groupe Γ de H et pour tout réseau Λ de H, l'action $\Gamma \curvearrowright H/\Lambda$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.*

Remarque 2.43. *Dans leur article [IS13], Ioana et Shalom notent la difficulté que représente le dernier exemple : ils soulèvent ainsi la question de savoir si le groupe* $\mathbf{F}_2 \times \mathbb{Z}$ *admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace. On a déjà vu que tel est bien le cas, et que celle-ci s'obtient en considérant des actions par automorphismes sur des espaces homogènes.*

Remarque 2.44. *Dans le cas de groupes de Lie p-adiques, le Théorème 2.38 n'est plus valable. En effet, il suffit de considérer le cas où* $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ *et* $H = SL_n(\mathbb{Q}_p)$*. Puisque* Γ *est un sous-groupe de* $SL_n(\mathbb{Z}_p)$*, qui lui-même est compact, il existe une mesure de probabilité* Γ*-invariante sur* $\mathbb{P}(\mathfrak{h})$*, et pourtant* $\mathfrak{h}^H = \{0\}$*.*

Chapitre 3

Groupes linéaires

On montre dans ce chapitre que tout groupe linéaire de type fini non-moyennable sur un corps de caractéristique nulle admet une action ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace. Si ce groupe est à radical résoluble trivial, on démontre que l'on obtient alors des actions libres.
Par ailleurs, on répond affirmativement à une question soulevée par Ioana et Shalom concernant l'existence d'une action libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace pour $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. On démontre plus généralement que pour les groupes Γ considérés par Fernos dans [Fer06], e.g. des sous-groupes Zariski-denses dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$, le groupe produit $\Gamma \times N$ admet une action libre, ergodique et ayant la propriété (T) relative à l'espace pour tout groupe nilpotent de type fini N.

Sommaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la question soulevée par Popa, Problème 5.10.2 de [Pop06a] : quels groupes admettent une action p.m.p. libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ?

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3 de l'Introduction de ce manuscrit, des réponses partielles ont été données. A notre tour, nous nous proposons de contribuer à la résolution de ce problème dans le cadre des groupes linéaires sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et non-moyennables.

Théorème 3.1. *Tout groupe Γ linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et non-moyennable admet une action ergodique $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ ayant la propriété (T) relative à l'espace.*

Les actions que l'on construit ne sont pas nécessairement fidèles et ne sont, a fortiori, pas nécessairement libres. Ceci étant, dans le cas où Γ est à radical résoluble trivial, nous sommes en mesure de produire des actions libres.

Rappelons qu'un groupe dénombrable est à radical résoluble trivial s'il n'admet pas de sous-groupe distingué résoluble propre.

Théorème 3.2. *Tout groupe Γ linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini non-moyennable et à radical résoluble trivial admet une action libre ergodique $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ ayant la propriété (T) relative à l'espace.*

Valette [Val05] et Fernos [Fer06] étudient la propriété (T) relative à l'espace de paires de groupes de la forme $(A \rtimes \Gamma, A)$, où Γ est un groupe de type fini et non-moyennable agissant par automorphismes sur un groupe abélien discret infini A.

Théorème 3.3 ([Fer06])**.** *Soit Γ un groupe de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to SL_n(\mathbb{R})$ tel que l'adhérence de Zariski de l'image est non-moyennable,

(ii) il existe un groupe abélien A de $\mathbb{Q}$-rang fini non nul et un morphisme $\varphi' : \Gamma \to Aut(A)$ tels que la pair correspondante $(A \rtimes_{\varphi'} \Gamma, A)$ ait la propriété (T) relative.

Ce résultat ne permet malheureusement pas d'atteindre tous les groupes linéaires sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et non-moyennables.

En effet, d'après le théorème de superrigidité de Margulis, les réseaux Γ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $n \geqslant 3$, n'admettent pas de morphisme $\varphi : \Gamma \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que l'adhérence de Zariski de l'image soit non-moyennable. Ils ne peuvent donc pas satisfaire aux hypothèses du Théorème 3.3.

Par ailleurs, dans la représentation obtenue $\varphi' : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$, il se peut qu'il y ait un noyau non trivial ; l'action $\Gamma \curvearrowright (\hat{A}, \mu)$ ne sera pas libre dans ce cas.

Notre résultat permet de s'affranchir de ces deux difficultés, la liberté des actions étant conditionnée, dans notre construction, par la trivialité du radical résoluble du groupe Γ. Nous obtenons ainsi une large classe de nouveaux exemples d'actions p.m.p. libres et ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace, ne serait-ce qu'en considérant les réseaux des groupes de Lie simples p-adiques.

Dans la dernière section de ce chapitre, nous montrons que nous sommes capables d'élargir encore notre classe de groupes admettant une action libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace. Nous considérons pour cela des produits de groupes de la forme $\Gamma \times N$ où N est un groupe nilpotent de type fini et Γ satisfait les hypothèses des Théorèmes 3.2 et 3.3, voir Proposition 3.15.

3.2 Étude de groupes linéaires

Dans cette section, nous nous proposons de démontrer qu'une large classe de groupes linéaires non-moyennables admettent une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace. Plus précisément, nous nous intéressons à la classe des groupes linéaires sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennables et à radical résoluble trivial.

Nous pouvons facilement déduire de ce résultat que tout groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et non-moyennable admet une action ergodique ayant la propriété (T) relative (pas nécessairement libre).

Pour ce faire, nous nous intéressons aux actions par translations sur des espaces homogènes. Il nous faut ainsi étudier la liberté, l'ergodicité et la propriété (T) relative à l'espace de telles actions.

Pour établir la propriété (T) relative à l'espace, l'idée est de se ramener au cas suivant. Prenons un groupe Γ linéaire sur un corps k de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial. Supposons de plus qu'on puisse représenter Γ de manière non bornée et Zariski-dense dans un groupe de Lie simple G.

Le Théorème 2.32 nous permet d'affirmer que l'action de Γ sur G/Λ a la propriété (T) relative à l'espace pour tout réseau Λ de G, dès lors qu'il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Or, c'est bien le cas sous nos hypothèses de travail. En effet, si tel n'était pas le cas, d'après le Lemme de Furstenberg, Γ admettrait un sous-groupe d'indice fini Γ_0 qui stabiliserait un sous-espace vectoriel propre V_0 de $\mathfrak{g}$. On obtiendrait ainsi un idéal propre de $\mathfrak{g}$, contredisant la simplicité de G.

Nous sommes donc amenés à démontrer que tout groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble admet une représentation nous permettant de suivre cet argument. Nous sommes ainsi conduits à étudier la structure des groupes linéaires, de type fini et non-moyennables.

Plus précisément, nous démontrons un résultat de "dé-compactification" qui est l'objet de la Proposition 3.11 : tout groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial s'injecte dans un produit de groupes de Lie simples de telle sorte que la projection dans chaque facteur soit non bornée et Zariski-dense. Ce fait qui, à notre connaissance, n'était pas encore établi, trouve toute son importance dans l'application que l'on en fait.

L'étude de la liberté des actions par translations sur des espaces homogènes fait l'objet du Lemme 3.5. Ce Lemme nous dit qu'une action par translations sur un espace homogène d'un groupe de Lie Zariski-connexe G est libre dès que le groupe agissant intersecte trivialement le centre de G.

Ainsi, une manière de s'assurer que l'on obtient des actions libres est de considérer des actions sur des espaces homogènes obtenus à partir de groupes Zariski-connexes.

Pour cela, supposons que Γ agisse par translations sur G/Λ, où G est un groupe algébrique qui n'est pas Zariski-connexe. Il suffit alors de considérer la composante Zariski-connexe du groupe G^0. Celle-ci est d'indice fini dans le groupe ambiant G. Ainsi, $\Gamma^0 = \Gamma \cap G^0$ est aussi d'indice fini dans Γ.

Si l'action de Γ^0 sur G^0/Λ^0 est libre et a la propriété (T) relative à l'espace, l'action obtenue par co-induction nous permet alors d'obtenir une action libre de Γ qui a la propriété (T) relative à l'espace.

Il nous suffit juste de nous assurer que la liberté d'une action est préservée par co-induction, ce que vient affirmer le Lemme 3.8.

Enfin, en ce qui concerne l'ergodicité de ces actions, nous la déduisons du Théorème de Howe-Moore.

Théorème 3.4 ([HM79]). *Soit S un groupe algébrique sur un corps local, simple, non compact, Zariski-connexe. Soit Λ un réseau de S.*
Pour tout $\Gamma \subset S$ sous-groupe non compact et fermé, l'action $\Gamma \curvearrowright S/\Lambda$ est ergodique.

Rappelons qu'un groupe algébrique sur un corps local est **simple** si son algèbre de Lie ne possède pas d'idéal non trivial.

3.2.1 Étude de la liberté de certaines actions préservant une mesure de probabilité

Nous nous intéressons tout au long des pages qui suivent aux actions de groupes p.m.p. obtenues de la manière suivante :

1. actions par translations ;
2. actions par automorphismes ;
3. actions obtenues par co-induction.

Dans ce qui suit, nous étudions donc la liberté de chacune de ces actions.

Commençons par nous concentrer sur le cas des actions par translations. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.5. *Soit G un groupe algébrique sur un corps local Zariski-connexe. Soient $\Lambda \subset G$ un réseau et $\mu_{G/\Lambda}$ la mesure de probabilité G-invariante sur G/Λ.*
Soit $g \in G$ tel que

$$\mu_{G/\Lambda}(\{\overline{h} \in G/\Lambda \,:\, g\overline{h} = \overline{h}\}) > 0.$$

Alors g appartient au centre $Z(G)$ de G.

Démonstration :

Soit X un domaine fondamental pour l'action de Λ sur G par translations à droite. Soit μ la mesure de Haar invariante à gauche sur G associée à $\mu_{G/\Lambda}$ et telle que $\mu(X) = 1$.
Il suffit de démontrer que $\mu(\{h \in X \,:\, h^{-1}gh \in \Lambda\}) > 0 \Rightarrow g \in Z(G)$.
Puisque Λ est dénombrable, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que :

$$\mu(\{h \in X \,:\, h^{-1}gh = \lambda\}) > 0.$$

Posons $A := \{h \in X \,:\, h^{-1}gh = \lambda\}) \subset G$. Par ailleurs, A est un sous-ensemble mesurable G de mesure positive, et par conséquent, AA^{-1} contient un voisinage de l'identité dans G.

On remarque de plus que AA^{-1} est contenu dans le stabilisateur $\mathrm{stab}_G(g)$ de g dans G. En effet, pour tous $a, b \in A$ on a :

$$ab^{-1}gba^{-1} = a\lambda a^{-1} = g.$$

Ainsi, $\mathrm{stab}_G(g)$ contient un voisinage non-vide de l'identité. D'autre part, $\mathrm{stab}_G(g)$ est Zariski-fermé. On en déduit que $\mathrm{stab}_G(g) = G$, ce qui équivaut à dire que $g \in Z(G)$.

□

Une action de groupe par translations sur un espace homogène G/Λ d'un groupe Zariski-connexe G (non nécessairement connexe) dont le centre est trivial est donc libre.

Remarque 3.6. *Ioana démontre un résultat similaire dans le cadre de groupes localement compacts, à base dénombrable et connexe (Lemme 8.2 [Ioa14]).*

Pour ce qui est des actions par automorphismes, on obtient un résultat semblable en adaptant simplement la démonstration.

Lemme 3.7. *Soit k un corps local de caractéristique nulle. Soit G un k-groupe Zariski-connexe. Soient $\Lambda \subset G$ un réseau et $\mu_{G/\Lambda}$ la mesure de probabilité G-invariante sur G/Λ.*
Soit $\gamma \in Aut_\Lambda(G)$ tel que

$$\mu_{G/\Lambda}(\{\overline{h} \in G/\Lambda \,:\, \gamma(\overline{h}) = \overline{h}\}) > 0.$$

Alors $\gamma = e$.

En particulier, les actions de groupes par automorphismes sur des espaces homogènes sont toujours libres.

Intéressons-nous maintenant aux actions obtenues par co-induction que nous avons construites au Chapitre 2, section 2.3.3 et dont on reprend les notations.

Lemme 3.8. *Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ deux groupes dénombrables. Soit $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ une action libre préservant la mesure de probabilité sur un espace de probabilité standard sans atome.*
Alors, l'action co-induite $\Gamma \curvearrowright (Y, \eta)$ est libre.

Démonstration :

Soit $\gamma \in \Gamma \backslash \{e\}$. Notons $A := \{y \in Y : \gamma.y = y\}$ et $p : Y \to X, y \mapsto x_e$ la projection sur la coordonnée associée à l'identité. Rappelons que dans la construction de l'action co-induite, section 2.3.3, le domaine fondamental est tel que $e \in D$.
Il existe un unique $d \in D$ et un unique $\gamma_0 \in \Gamma_0$ tels que $\gamma^{-1}.e = d = \gamma^{-1}\gamma_0^{-1}$. On a alors

$$p^{-1}(p(A)) = \{y \in Y : \gamma_0^{-1}x_d = x_e\}.$$

On distingue deux cas.

Si $d \neq e$, la diagonale étant de mesure nulle pour la mesure produit, on a

$$\eta(p^{-1}(p(A))) \leqslant \mu \otimes \mu(\Delta_{X_{\gamma_0}}) = 0,$$

où $\Delta_{X_{\gamma_0}} = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \gamma_0^{-1}x_1 = x_2\}$. Ainsi, puisque $A \subset p^{-1}(p(A))$, on a $\eta(A) = 0$.
Si $d = e$, la liberté de l'action de $\Gamma_0 \curvearrowright (X, \mu)$ nous permet de déduire encore une fois que $\eta(A) = 0$.

Dans tous les cas, on a bien $\eta(A) = 0$. L'action co-induite est libre.

□

3.2.2 Dé-compactification

Comme nous l'avons vu dans le préambule de cette section, nous sommes amenés à démontrer que tout groupe Γ linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type-fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial admet une représentation linéaire satisfaisante. On cherche une représentation linéaire dans un produit de groupes simples non-compacts, et telle que la projection sur chaque facteur soit non-bornée et Zariski-dense.

Une des difficultés que nous pouvons rencontrer est donnée par l'exemple suivant : $\Gamma = \mathbf{F}_2 \subset SO_3(\mathbb{R})$. En effet, dans ce cas, l'action de Γ sur son adhérence de Zariski $SO_3(\mathbb{R})$ ne peut avoir la propriété (T) relative à l'espace ; on peut aisément construire une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{so}_3)$.

De même, le cas où Γ est un groupe Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$ est à éviter. Les actions par translations sur des espaces homogènes obtenus à partir de tels groupes ne peuvent avoir la propriété (T) relative à l'espace comme nous l'avons vu dans le Théorème 2.38.

Plus généralement, partant d'un groupe $\Gamma \subset GL_n(k)$ de type fini, à radical résoluble trivial, sur un corps local k, son adhérence de Zariski est de la forme $S_{nc} \times S_c$, où S_{nc} est un groupe semi-simple sans facteur compact et S_c est un groupe semi-simple compact. Les difficultés sont alors les suivantes :

1. "décompactifier" la projection de Γ sur S_c,
2. s'assurer que la projection de Γ sur chaque facteur non-compact n'est pas bornée.

Tits rencontre une difficulté similaire lorsqu'il répond par l'affirmative au problème de Day-von Neumann dans le cas des groupes linéaires [Tit72].

En effet, partant d'un groupe non-moyennable linaire, Tits essaye d'obtenir deux éléments de ce groupe vérifiant les hypothèses du Lemme du ping-pong. Pour cela, il cherche un espace projectif sur lequel agissent ces deux éléments de sorte que chacun ait une unique valeur propre de module maximal et une unique valeur propre de module minimal. Les points associés aux droites propres dans l'espace projectif jouent alors le rôle de point d'attraction et de point de répulsion, permettant ainsi de vérifier les hypothèses du Lemme du ping-pong.

Seulement, ici aussi, il se peut que notre groupe de départ soit un sous-groupe de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, auquel cas toutes les valeurs propres sont de module 1. C'est ainsi qu'apparaît l'idée clé de Tits : changer de corps de base afin d'obtenir une valeur propre de module strictement plus grand que 1.

Plus précisément, Tits démontre le résultat suivant.

Lemme 3.9 ([Tit72], Lemme 4.1)**.** *Soient k un corps de type fini et $t \in k^*$ un élément d'ordre infini. Alors, il existe un corps local k' muni d'une valeur absolue $|.|$ et d'un morphisme $\sigma : k \to k'$ tel que $|\sigma(t)| \neq 1$.*

Ce Lemme nous permet d'injecter notre groupe Γ de type fini, à radical résoluble trivial dans un nouveau groupe linéaire défini sur un autre corps qui est local et tel que l'image de Γ ne soit plus bornée. Le quotient d'un groupe linéaire par un sous-groupe fermé restant linéaire (voir par exemple [Hum75]), on peut de plus supposer que l'adhérence de Zariski de l'image est semi-simple.

Deux difficultés subsistent néanmoins :

1. s'assurer que l'on peut obtenir une injection Zariski-dense dans un groupe semi-simple sans facteur compact,
2. s'assurer que l'image de cette injection est non-bornée sur chaque facteur.

Le Lemme suivant répond à ces interrogations.

Lemme 3.10. *Soit $\Gamma \subset GL_n(k)$ un groupe de type fini, non-moyennable sur un corps de caractéristique nulle k. Notons G l'adhérence de Zariski de Γ. Supposons que le radical résoluble de Γ soit trivial et que G soit simple.*
Alors, il existe un corps local $\tilde{k}$ de caractéristique nulle et un morphisme injectif

$$j : \Gamma \to GL_n(\tilde{k})$$

d'image non bornée tel que l'adhérence de Zariski $j(\Gamma)$ est simple.

Démonstration :
Commençons par remarquer que quitte à remplacer G par $G/Z(G)$, on peut supposer que le centre de G est trivial puisque Γ est à radical résoluble trivial et donc que G est simple comme groupe abstrait (voir 29.5 [Hum75]). Ainsi, Γ s'injecte dans le groupe linéaire à centre trivial $G/Z(G)$.
D'après le Lemme de Tits, il existe un corps local $\tilde{k}$ de caractéristique nulle et un morphisme injectif

$$i : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\tilde{k})$$

d'image non bornée.
Notons $\tilde{G}$ l'adhérence de Zariski de $i(\Gamma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\tilde{k})$ et $\mathrm{Rad}(\tilde{G})$ le radical résoluble de $\tilde{G}$. La projection $\Gamma \to \tilde{G}/\mathrm{Rad}(\tilde{G})$ est injective puisque $\Gamma \cap \mathrm{Rad}(\tilde{G})$ est triviale. Ainsi, comme précédemment, on peut supposer que $\tilde{G}$ est semi-simple.
On écrit alors $\tilde{G} = S_{nc,1} \times \cdots \times S_{nc,r} \times S_{c,1} \cdots \times S_{c,q}$ comme produit direct, car le centre de Γ est trivial, où les $S_{nc,l}$ sont des groupes simples non-compacts pour $l = 1, \ldots, r$, et les $S_{c,l}$ sont des groupes simples compacts pour $l = 1, \ldots, q$. Par construction, $i(\Gamma)$ n'est pas bornée. Il existe donc $l \in \{1, \ldots, r\}$ tel que la projection de $i(\Gamma)$ dans $S_{nc,l}$ ne soit pas bornée. Nous pouvons supposer que $l = 1$.
Montrons qu'alors la projection

$$\pi_1 : \Gamma \to S_{nc,1}$$

est injective.
Procédons par l'absurde et supposons que $\ker \pi_1 = \Gamma_0 \subset \Gamma$ ne soit pas trivial. Soit $\overline{\Gamma_0}^{Zar,k}$ l'adhérence de Zariski de Γ_0 dans $\mathrm{GL}_n(k)$. Alors $\overline{\Gamma_0}^{Zar,k}$ est un sous-groupe distingué non trivial de G. Par conséquent $\overline{\Gamma_0}^{Zar,k} = G$.
Soit k_0 le corps engendré par les coefficients matriciels représentant une partie génératrice de Γ dans $\mathrm{GL}_n(k)$. Puisque k est une extension de corps de k_0, Γ_0 et Γ ont la même adhérence de Zariski dans $\mathrm{GL}_n(k_0)$; $\overline{\Gamma_0}^{Zar,k_0} = \overline{\Gamma}^{Zar,k_0}$.
Mais alors, puisque $\tilde{k}$ est une extension de corps de k_0, les adhérences de Zariski dans $\mathrm{GL}_n(\tilde{k})$ de Γ et Γ_0 sont égales ;

$$\overline{\Gamma_0}^{Zar,\tilde{k}} = \overline{\Gamma}^{Zar,\tilde{k}} = \tilde{G} = S_{nc,1} \times \cdots \times S_{nc,r} \times S_{c,1} \times S_{c,q}.$$

D'autre part $\Gamma_0 \subset S_{nc,2} \times \cdots \times S_{nc,r} \times S_{c,1} \times S_{c,q}$, donc les adhérences de Zariski de Γ_0 et Γ doivent être distinctes. On obtient une contradiction et ainsi $\Gamma_0 = \{e\}$.
Nous obtenons de la sorte un morphisme injectif

$$j : \Gamma \to S_{nc,1}$$

d'image non bornée et Zariski-dense.

□

Proposition 3.11. *Soit $\Gamma \subset GL_n(k)$ un groupe de type fini, non moyennable, sur un corps de caractéristique nulle k. Supposons que Γ soit à radical résoluble trivial.*
Alors, il existe des corps locaux de caractéristique nulles $k_1, \ldots, k_r$ et des groupes de Lie simples $S_1, \ldots, S_r$ définis sur $k_1, \ldots, k_r$ ainsi qu'un morphisme injectif

$$j : \Gamma \hookrightarrow S_1 \times \cdots \times S_r$$

tel que la projection de $j(\Gamma)$ sur chaque facteur S_i est non bornée et Zariski-dense.

Démonstration :
Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(k)$ l'adhérence de Zariski-dense de Γ dans $\mathrm{GL}_n(k)$. Une fois encore, on peut supposer que G est semi-simple.
On peut écrire $G = \tilde{S}_1 \times \cdots \times \tilde{S}_r$, comme produit direct de groupes simples abstraits $\tilde{S}_i$, $i = 1, \ldots, r$, puisque le centre de G est trivial. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, la projection Γ_i de Γ dans $\tilde{S}_i$ vérifie les conditions du lemme précédent.

Par conséquent, pour $i = 1, \ldots, r$, il existe un corps local de caractéristique nulle k_i et un morphisme injectif $j_i : \Gamma_i \to \mathrm{GL}_n(k_i)$ dont l'image est non bornée et d'adhérence de Zariski S_i. Ainsi, le morphisme

$$j : \Gamma \to S_1 \times \cdots \times S_r$$

est injectif, d'image non bornée et la projection de $j(\Gamma)$ sur chaque facteur S_i est Zariski-dense.

$\square$

3.2.3 Construction d'actions ayant la propriété (T) relative à l'espace

Soit Γ un groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial. A l'aide de la Proposition 3.11 nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 3.2 : Γ admet une action p.m.p. libre, ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Démonstration du Théorème 3.2 :

Soit $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(k)$ un groupe de type fini, non-moyennable, sur un corps k de caractéristique nulle. Supposons de plus que le radical résoluble de Γ soit trivial. D'après la Proposition 3.11, il existe des corps locaux de caractéristique nulles $k_1, \ldots, k_r$ et des groupes de Lie simples $S_1, \ldots, S_r$ sur $k_1, \ldots, k_r$, respectivement, tels que le morphisme injectif

$$j : \Gamma \hookrightarrow S_1 \times \cdots \times S_r$$

soit d'image non bornée sur chaque facteur et Zariski-dense.
Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, soit Λ_i un réseau de S_i (voir [BH78] pour l'existence de réseaux dans de tels groupes S_i) et notons μ_i la mesure de probabilité S_i-invariante sur S_i/Λ. Considérons l'action naturelle de Γ par translations sur $(X, \mu) = (\prod_{i=1}^r S_i/\Lambda_i, \otimes_{i=1}^r \mu_i)$.

Supposons dans un premier temps que pour $i = 1, \ldots, r$, S_i est Zariski-connexe. On déduit du Lemme 3.5 que l'action de Γ sur (X, μ) est libre.
Montrons à présent que cette action possède la propriété (T) relative à l'espace. Pour cela, d'après la Proposition 2.15, il suffit de montrer que pour $i = 1, \ldots, n$ l'action $\Gamma_i \curvearrowright (S_i/\Lambda, \mu_i)$ a la propriété (T) relative à l'espace.
Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que l'action $\Gamma_i \curvearrowright (S_i/\Lambda_i, \mu_i)$ n'ait pas la propriété (T) relative à l'espace. D'après le Théorème 2.32, il existe une mesure de probabilité Γ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathfrak{s}_\mathrm{i})$, où $\mathfrak{s}_\mathrm{i}$ désigne l'algèbre de Lie de S_i.
Mais $\Gamma \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{s}_\mathrm{i})$ est non bornée car Ad: $S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{s}_\mathrm{i})^0$ est un isomorphisme d'image non-compacte (voir par exemple le chapitre 14.1 dans [Hum75]). Ainsi, d'après le Lemme de Furstenberg, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et un sous-espace $V_0 \subset \mathfrak{s}_\mathrm{i}$ propre et Γ_0-invariant .
Puisque Γ est Zariski-dense dans S_i, il en est de même de Γ_0, et alors V_0 est $\mathrm{Ad}(S_i)$-invariant. Par conséquent, V_0 est un idéal propre de $\mathfrak{s}_\mathrm{i}$. Ce qui contredit la simplicité de S_i.
L'action $\Gamma \curvearrowright (S_i/\Lambda, \mu_i)$ a donc la propriété (T) relative à l'espace.
Enfin, pour ce qui est de l'ergodicité de cette action, c'est une simple application du Théorème de Howe-Moore ([HM79]).

Si maintenant l'un des S_i n'est pas Zariski connexe, il suffit alors de considérer la composante Zariski-connexe S_i^0. Celle-ci est d'indice fini dans S_i. Ainsi, $\Gamma_i^0 = p_i(\Gamma) \cap S_i^0$ est aussi d'indice fini dans $p_i(\Gamma)$. Les étapes précédentes s'appliquent alors à l'action de Γ_i^0 sur S_i^0/Λ_i^0 qui est donc ergodique avec la propriété (T) relative à l'espace. Enfin, la combinaison des Proposition 2.20 et Lemme 3.8, nous permet de construire par co-induction une action de Γ p.m.p. libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Dans tous les cas, on obtient bien une action p.m.p. libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

□

Supposons maintenant que Γ ne soit pas à radical résoluble trivial.
Démonstration du Théorème 3.1
Il suffit de considérer la projection

$$\pi : \Gamma \to \Gamma/\mathrm{Rad}(\Gamma).$$

En effet, puisque $\pi(\Gamma)$ satisfait les hypothèses du Théorème 3.2, Γ a bien une action ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

□

3.3 Étude de cas particuliers

Nous permettant d'atteindre une large classe de groupes, le Théorème 3.2 est néanmoins insuffisant pour obtenir des actions p.m.p. libres, ergodiques et ayant la propriété (T) relative à l'espace pour tout groupe linéaire dénombrable non-moyennable.

La difficulté principale vient du fait que les actions p.m.p. libres par translations de groupes de la forme $\Gamma \times R$, où R est un groupe dénombrable résoluble, n'ont jamais la propriété (T) relative à l'espace.

C'est une difficulté déjà soulevée par Ioana et Shalom [IS13], et qui les amène à demander si le groupe $\mathbf{F}_2 \times \mathbb{Z}$ admet une action libre ergodique avec la propriété (T) relative à l'espace.

Pour répondre à cette question, il convient donc de considérer d'autres actions de groupes : les actions par automorphismes d'espaces homogènes.

Nous avons déjà vu qu'une application directe de la Proposition 2.15 permettait de répondre à la question de Ioana et Shalom : $\mathbf{F}_2 \times \mathbb{Z}$ possède bien des actions libres ergodiques ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Au vu de notre Théorème 3.2, pour tout groupe Γ linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini et à radical résoluble trivial, les questions que l'on peut soulever sont les suivantes.

Question 3.12. *Est-ce que $\Gamma \times \mathbb{Z}$ admet une action libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ? Plus généralement, est-ce pour tout groupe linéaire résoluble de type fini R, le groupe $\Gamma \times R$ admet une action libre et ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace ?*

Nous apportons une réponse affirmative mais partielle sous des conditions supplémentaires portant sur le groupe Γ.

Le Théorème 3.3 de Fernos nous fournit les conditions à imposer sur le groupe Γ pour obtenir des actions par automorphismes ayant la propriété (T) relative à l'espace.

En effet, le groupe abélien discret A donné par ce théorème est de la forme $\mathbb{Z}[S^{-1}]^N$ où S est un ensemble fini de nombres premiers, et comme nous l'avons vu, l'action $\Gamma \curvearrowright (\hat{A}, \mu)$ a la propriété (T) relative à l'espace. Néanmoins, il se peut que cette action ne soit pas libre. Partant de cette action, nous devons donc adapter notre construction.

Nous pouvons maintenant montrer que pour tout groupe Γ à radical résoluble trivial et satisfaisant les conditions du Théorème 3.3, $\Gamma \times \mathbb{Z}$ admet bien une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Proposition 3.13. *Soit Γ un groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial. Supposons qu'il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to SL_n(\mathbb{R})$ tel que l'adhérence de Zariski de l'image soit non-moyennable.*
Alors $\Gamma \times \mathbb{Z}$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Démonstration :

D'après le Théorème 3.3, il existe un morphisme $\varphi' : \Gamma \to \mathrm{SL}_N(\mathbb{Z}[S^{-1}])$ tel que la paire $(A \rtimes \varphi'(\Gamma), A)$ ait la propriété (T) relative, où $A = \mathbb{Z}[S^{-1}]^N$. L'action associée $\Gamma \curvearrowright (\hat{A}, \lambda)$ sur le groupe dual $\hat{A}$ muni de la mesure de Haar normalisée a la propriété (T) relative à l'espace. D'après la Remarque 2.37, quitte à remplacer λ par ses composantes ergodiques, on peut supposer que μ est sans atome et ergodique pour l'action de Γ.

D'après la Proposition 2.15 l'action diagonale de Γ sur $(\hat{A} \times \hat{A}, \lambda \otimes \lambda)$ a la propriété (T) relative à l'espace.
D'autres part, $\mathbb{Z}$ agit librement sur $(\hat{A} \times \hat{A}, \lambda \otimes \lambda)$ par :

$$m.(a, b) = (a + mb, b),$$

où la loi de groupe dans $\hat{A}$ est notée additivement. L'action $\Gamma \times \mathbb{Z} \curvearrowright (\hat{A} \times \hat{A}, \lambda \otimes \lambda)$, donnée par $(\gamma, m).(a, b) = (\gamma(a + mb), \gamma(b))$ a la propriété (T) relative à l'espace.
Le Théorème 3.2 nous permet d'affirmer que Γ admet une action libre ergodique $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ ayant la propriété (T) relative à l'espace.
Enfin l'action $\Gamma \times \mathbb{Z} \curvearrowright (X \times \hat{A} \times \hat{A}, \mu \otimes \lambda \otimes \lambda)$ donnée pour tous $\gamma \in \Gamma, m \in \mathbb{Z}, x \in X, (a, b) \in \hat{A} \times \hat{A}$ par :

$$(\gamma, m).(x, a, b) = (\gamma.x, \gamma(a + mb), \gamma(b))$$

est libre, ergodique et a la propriété (T) relative à l'espace.

$\square$

Remarque 3.14. *On démontre en fait le résultat plus général suivant. Soit $\Gamma_1 \subset SL_n(\mathbb{Z}[S^{-1}])$ tel que $\Gamma_1 \curvearrowright ((\mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p)^n / \mathbb{Z}[S^{-1}]^n, \lambda)$ soit libre, ergodique et ait la propriété (T) relative à l'espace, où S est un ensemble fini de rationnel. Alors, pour tout $\Gamma_2 \subset SL_m(\mathbb{Z}[S^{-1}])$, le groupe produit $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace. Il suffit pour cela de reprendre mutatis mutandis la démonstration de la Proposition 2.13.*

La remarque précédente nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.15. *Soit Γ un groupe linéaire sur un corps de caractéristique nulle, de type fini, non-moyennable et à radical résoluble trivial. Soit N un groupe nilpotent de type fini.*
Supposons qu'il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to SL_n(\mathbb{R})$ tel que l'adhérence de Zariski de l'image soit non-moyennable. Alors $\Gamma \times N$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative à l'espace.

Démonstration :

Tout groupe nilpotent de type fini admet un sous-groupe d'indice fini qui s'injecte dans l'ensemble des matrices triangulaires à coefficients entiers (voir par exemple le Chapitre 17 dans [KM79]). On peut donc supposer, d'après la Proposition 2.20, que N est un sous-groupe de $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$, l'ensemble des matrices unipotentes à coefficients entiers.
En particulier, $N \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Ainsi, en reprenant les lignes de démonstration de la Proposition 3.13 ainsi que la Remarque 3.14, on obtient une action p.m.p. de $\Gamma \times N$ libre, ergodique et ayant la propriété (T) relative à l'espace.

□

En vue de répondre à la question de Popa dans le cadre des groupes linéaires, il nous reste encore à répondre aux questions suivantes.

Question 3.16.
1. *Soit Γ un groupe linéaire, dénombrable et à radical résoluble trivial tel qu'il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to SL_n(\mathbb{R})$ dont l'adhérence de Zariski de l'image est non-moyennable. Soit R un groupe linéaire résoluble et de type fini. Est-ce que $\Gamma \times R$ admet une action libre, ergodique et ayant la propriété (T) relative à l'espace ?*
2. *Si Γ est à radical résoluble trivial et ne vérifie plus la condition introduite par le Théorème 3.3 de Fernos, par exemple un réseau de $SL_n(\mathbb{Q}_p)$, est-ce que $\Gamma \times \mathbb{Z}$ admet une action libre ergodique ayant la propriété (T) relative ?*

Nous pouvons reformuler cette dernière question de la manière suivante :

Question 3.17. *Soit Γ un groupe linéaire, de type fini à radical résoluble trivial. Est-ce qu'il existe une action p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ libre, ergodique et ayant la propriété (T) à l'espace telle que le commutant de Γ dans $Aut(X, \mu)$ ait un élément d'ordre infini ?*

Achevons ce chapitre en notant que nos résultats et les questions précédentes sont posées dans le cadre de groupe de type fini. Il convient donc de se demander aussi ce qu'il en est dans le cas où Γ n'est pas de type fini.

Chapitre 4

Nilvariétés

On étudie dans ce chapitre la propriété (T) relative à l'espace d'actions de groupes Γ par automorphismes sur une large classe de nilvariétés : des nilvariétés compactes obtenues à partir de groupes de Lie nilpotents N de rang 2. Ces groupes de Lie sont eux-mêmes définis à l'aide de graphes finis.
On donne des critères pour que de telles actions aient la propriété (T) relative à l'espace. On montre dans un premier temps que l'étude de la propriété (T) relative à l'espace peut se ramener à l'étude d'actions sur des tores. Puis on démontre que, dans le cas d'action de groupes Zariski-denses dans le groupe des automorphismes d'une nilvariété, la propriété (T) relative à l'espace équivaut à l'absence de point fixe sur le commutateur $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ de l'algèbre de Lie de N.

Sommaire

4.1 Introduction

Prolongement naturel de l'étude des actions par automorphismes sur des tores, les actions par automorphismes sur des nilvariétés sont l'objet d'étude de ce chapitre. Nous intéressons plus particulièrement à une classe de nilvariétés définies à l'aide de graphes finis. Ces exemples fournissent une large classe de nilvariétés modelées sur des groupes de Lie nilpotents de rang 2.

La section 2 introduit ces nilvariétés en reprenant la présentation donnée par Dani et Mainkar [DM05]. On commence par introduire les notions utiles sur ces graphes finis, ce qui nous permet de définir les groupes de Lie nilpotents associés et de décrire leurs groupes d'automorphismes, voir Théorème 4.9.

On s'intéresse dans la section 3 à la propriété (T) relative à l'espace d'actions de groupes par automorphismes sur ces nilvariétés. On montre dans un premier temps que l'on peut se ramener à l'étude d'actions sur des tores, voir Théorème 4.12.

Puis, on précise le Théorème 2.32 dans ce cadre-là. On démontre que pour des sous-groupes dénombrables Γ Zariski-denses du groupe d'automorphismes d'une nilvariété, l'action de Γ sur cette nilvariété a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement si l'action de Γ sur le commutateur de l'algèbre de Lie du groupe nilpotent associé n'admet pas de point fixe non trivial, voir Théorème 4.14.

A l'aide de ces résultats, on déduit le fait surprenant suivant. Soient $H_{\mathbb{R}}$ le groupe de Heisenberg réel et $H_{\mathbb{Z}}$ son réseau standard. Malgré les similarités avec l'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}^n}(\mathbb{R}^n)$ sur le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, l'action $\mathrm{Aut}_{H_{\mathbb{Z}}}(H_{\mathbb{R}}) \curvearrowright H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace, voir Proposition 4.15. En particulier, toute sous-relation d'équivalence de la relation d'équivalence induite par l'action de $\mathrm{Aut}_{H_{\mathbb{Z}}}(H_{\mathbb{R}})$ sur $H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

On exhibe enfin de nouveaux exemples d'actions ayant la propriété (T) relative à l'espace.

4.2 Nilvariétés définies par des graphes finis

4.2.1 Définitions

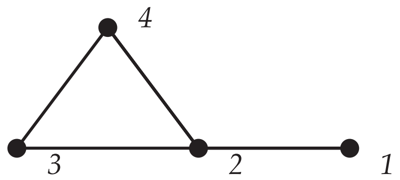
Soit (S, E) un graphe fini, non orienté, sans boucle ni arête multiple, où S désigne l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On notera $\alpha\beta \in E$ une arête, avec $\alpha, \beta \in S$.

Définition 4.1. *Un sous-ensemble $S' \subset S$ est dit* cohérent *si pour tout $\alpha, \beta \in S'$ on a la propriété suivante :*
si $\gamma \in S$ est tel que $\alpha\gamma \in E$, alors soit $\gamma = \beta$ ou bien $\beta\gamma \in E$.

Autrement dit, une partie S' est cohérente si pour toute paire d'éléments de S', un voisin de l'un est à distance au plus un de l'autre.

La cohérence est stable par union entre parties ayant au moins un élément en commun. Ainsi on peut partitionner S en parties cohérentes maximales, qu'on appellera composantes cohérentes.

Exemple 4.2. *Considérons le graphe suivant*



On vérifie que les composantes cohérentes sont $\{1\}, \{2\}$ et $\{3, 4\}$.

On obtient ainsi une relation d'équivalence sur $S \times S$ définie par la propriété d'être dans la même composante cohérente. On définit alors une relation d'ordre partielle sur les classes d'équivalence de cette relation, i.e. sur les composantes cohérentes de S que l'on note $[S]$ par :

$$\Theta := \{([\alpha],[\beta]) \in [S] \times [S] \;:\; \text{les voisins de tous } \alpha \in [\alpha] \text{ sont à distance au plus 1 de tous } \beta \in [\beta]\}$$

Proposition 4.3. *La relation Θ définit une relation d'ordre sur $[S] \times [S]$.*

Démonstration :
Introduisons les notations suivantes :

$$\Omega(\alpha) := \{\beta \in S \,:\, \alpha\beta \in E\}$$
$$\overline{\Omega(\alpha)} := \Omega(\alpha) \cup \{\alpha\}$$

Θ devient alors :

$$\Theta = \{([\alpha],[\beta]) \in [S] \times [S] \,:\, \Omega(\alpha) \subset \overline{\Omega(\beta)}, \text{ pour tous } \alpha \in [\alpha], \beta \in [\beta]\}$$

Commençons par vérifier que cet ensemble est bien indépendant du choix des éléments dans chaque classe.

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$ distincts et $\beta \in [\beta]$ tels que $(\alpha_1, \beta) \in \Theta$. Montrons que $(\alpha_2, \beta) \in \Theta$. On suppose que $[\alpha] \neq [\beta]$, sinon il n'y a rien à montrer (il suffit d'appliquer les définitions).

On a $\Omega(\alpha_1) \subset \overline{\Omega(\beta)}$ et on veut $\Omega(\alpha_2) \subset \overline{\Omega(\beta)}$. Mais α_1 et α_2 sont dans la même classe, donc $\Omega(\alpha_1) \subset \overline{\Omega(\alpha_2)}$ et $\Omega(\alpha_2) \subset \overline{\Omega(\alpha_1)}$ donc $\Omega(\alpha_2) \subset \overline{\Omega(\beta)} \cup \{\alpha_1\}$.

Ainsi, ou bien $\alpha_1 \notin \Omega(\alpha_2)$ et alors on a $(\alpha_2, \beta) \in \Theta$, ou bien $\alpha_1 \in \Omega(\alpha_2)$ et alors α_2 et α_1 sont voisins, et tous les voisins de α_2 sont voisins de α_1, donc $\alpha_1 \in \overline{\Omega(\beta)}$.

Dans tous les cas, on a $(\alpha_2, \beta) \in \Theta$. On procède de même lorsque l'on regarde $\beta \in [\beta]$. On identifiera α et $[\alpha]$ pour tout $\alpha \in S$.

Réflexivité
C'est direct.

Transitivité
Soient $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in \Theta$. Alors $\Omega(\alpha) \subset \overline{\Omega(\beta)}$ et $\Omega(\beta) \subset \overline{\Omega(\gamma)}$. Ainsi, si $\beta \notin \Omega(\alpha)$ on a directement $(\alpha, \beta) \in \Theta$.

Il suffit de considérer le cas où $\beta \in \Omega(\alpha)$. Alors α est un voisin de β donc ; ou bien α est un voisin de γ, ou bien $\alpha = \gamma$. Dans tous les cas, on a $(\alpha, \gamma) \in \Theta$.

Anti-symétrie
Soient $(\alpha, \beta), (\beta, \alpha) \in \Theta$. Alors les voisins de α sont voisins de β ou β et réciproquement. Ce qui revient à dire que α et β sont dans la même composante cohérente. Donc $\alpha = \beta$.

□

On donne maintenant la définition d'un groupe de Lie nilpotent associé à un graphe fini.

Pour cela, on commence par définir une algèbre de Lie. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par une base indexée par S. Soit W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par une base indexée par E. Posons $\mathcal{N} = V \oplus W$.

On définit une unique structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{N}$ en posant pour tout vecteur de base

$$[u_\alpha, u_\beta] = \begin{cases} u_{\alpha\beta} \in W \text{ si } \alpha, \beta \in S \text{ et } \alpha\beta \in E \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{4.1}$$

Cette structure fait de $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie nilpotente de rang 2. Soit N le groupe de Lie simplement connexe ayant $\mathcal{N}$ pour algèbre de Lie. Le groupe N peut être réalisé comme étant $\mathcal{N}$ muni de la multiplication

$$(v_1, w_1).(v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2 + [v_1, v_2]), \quad \text{pour tous } v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W.$$

Par ailleurs, l'application exponentielle permettant de passer de $\mathcal{N}$ à N est l'identité. En effet, on définit des groupes à un paramètre sur N par

$$\gamma_{v,w}(t) = (tv, tw), \quad \text{pour tous } v \in V, w \in W$$

et alors $\exp(v \oplus w) = \gamma_{v,w}(1) = (v, w)$ nous donne l'exponentielle que l'on identifiera à l'identité. Ainsi, on identifie N à $\mathcal{N}$.

Exemple 4.4. *Si l'on considère le graphe à deux sommets reliés par une arête, le groupe de Lie nilpotent obtenu à partir de ce graphe est le groupe de Heisenberg.*

Terminons cette partie par la définition de nilvariété associée au graphe (S, E).

Soit $N_\mathbb{Z}$ le sous-groupe dénombrable de N engendré par $\{u_\alpha \in N : \alpha \in S\}$. On vérifie que $N/N_\mathbb{Z}$ est compact, donc $N_\mathbb{Z}$ est un réseau et $N/N_\mathbb{Z}$ est une nilvariété compacte.

Définition 4.5 ([DM05]). *On appelle nilvariété associée au graphe (S, E) la nilvariété compacte $(N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ où μ est la mesure de probabilité invariante par translation induite par une mesure de Haar sur N.*

Notons que l'on n'a pas unicité de réseau dans N à automorphisme du groupe N près. En effet, considérons le groupe de Heisenberg $H_{\mathbb{R}}$ donné par le graphe à deux sommets et une arête. Notons $H_{\mathbb{Z}}$ le réseau de $H_{\mathbb{R}}$ défini comme précédemment. Si l'on regarde $\Gamma := \{(v, \frac{w}{2}) \in H / v \in \mathbb{Z}^2, w \in \mathbb{Z}\}$, on obtient un autre réseau de H.

Proposition 4.6. *Il n'existe pas d'automorphisme de $H_{\mathbb{R}}$ envoyant Γ sur $H_{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration :

Notons $Z = [H_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}]$ le centre de $H_{\mathbb{R}}$. On vérifie alors que tous les éléments de $[H_{\mathbb{Z}}, H_{\mathbb{Z}}]$ s'écrivent comme des carrés de $Z \cap H_{\mathbb{Z}}$. Par contre, certains carrés de $Z \cap \Gamma$ ne sont pas dans $[\Gamma, \Gamma]$.

Ainsi, s'il existait un automorphisme de $H_{\mathbb{R}}$ envoyant Γ sur $H_{\mathbb{Z}}$, cet automorphisme enverrait $[\Gamma, \Gamma]$ sur $[H_{\mathbb{Z}}, H_{\mathbb{Z}}]$ et Z sur Z. Il enverrait donc $Z \cap \Gamma$ sur $Z \cap H_{\mathbb{Z}}$.

Mais si l'on prend un carré de $Z \cap \Gamma$ qui n'est pas un élément de $[\Gamma, \Gamma]$, il est envoyé sur le carré d'un élément de $Z \cap H_{\mathbb{Z}}$ qui est un élément de $[H_{\mathbb{Z}}, H_{\mathbb{Z}}]$. Ce qui n'est pas possible, car $[\Gamma, \Gamma]$ et $[H_{\mathbb{Z}}, H_{\mathbb{Z}}]$ sont en bijection.

Il n'existe donc pas d'automorphisme de $H_{\mathbb{R}}$ envoyant Γ sur $H_{\mathbb{Z}}$.

□

4.2.2 Étude du groupe d'automorphismes

On garde les notations du paragraphe précédent. Pour étudier le groupe des automorphismes de N, on se ramène à étudier les automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. En effet, puisque N est simplement connexe, on a une correspondance bijective entre $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Aut}(N)$.

On commence par décrire de manière générale le groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie nilpotente de rang 2. Soit $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie nilpotente de rang 2. Alors $\mathcal{N}$ peut s'écrire

$$\mathcal{N} = V \oplus [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$$

où V est un espace vectoriel supplémentaire de $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$, que l'on se fixe pour la suite. Notons $\pi : \mathcal{N} \to V$ l'application de projection.

A chaque application $\theta \in \mathrm{Hom}(V, [\mathcal{N}, \mathcal{N}])$, on associe un automorphisme de $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} \tau_\theta : \mathcal{N} &\to \mathcal{N} \\ \xi &\mapsto \xi + \theta(\pi(\xi)) \end{aligned}$$

Notons T l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{N}$ obtenus de cette manière. Alors

$$T \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{N}/[\mathcal{N}, \mathcal{N}], [\mathcal{N}, \mathcal{N}]) \cong \mathrm{Hom}(V, [\mathcal{N}, \mathcal{N}]),$$

et on vérifie que T est distingué dans Aut($\mathcal{N}$).

D'autre part, notons $U = \{\tau \in \text{Aut}(\mathcal{N}) \,/\, \tau(V) = V\}$. On remarque que $T \cap U$ est trivial, et mieux :

Proposition 4.7. *Aut($\mathcal{N}$) est le produit semi-direct des groupes T et U.*

Démonstration :

Soit $\tau \in \text{Aut}(\mathcal{N})$. On définit de manière unique deux applications linéaires $\phi : V \to V$ et $\psi : V \to [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ telles que pour tout $v \in V$ on ait $\tau(v) = \phi(v) + \psi(v)$.

Puisque $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ est τ-invariant et puisque τ est inversible, il s'ensuit que ϕ est inversible.

Considérons maintenant l'application $\theta \in \text{Hom}(V, [\mathcal{N}, \mathcal{N}])$ définie par $\theta(v) = \psi(\phi^{-1}(v))$ pour tout $v \in V$.

Alors, pour tout $v \in V$ on a $\tau_\theta^{-1}(\tau(v)) = \tau_\theta^{-1}(\phi(v) + \psi(v)) = \phi(v) + \psi(v) - \theta(\phi(v)) = \phi(v)$ car $\theta(\phi(v)) = \psi(v)$. Ce qui montre que $\tau_\theta^{-1}(\tau(v)) \in V$ pour tout $v \in V$. Ainsi, $\tau_\theta^{-1}\tau \in U$, et donc $\tau \in TU$. Ce qui achève la démonstration.

□

Notons G le sous-groupe de $GL(V)$ donné par la restriction à V des éléments de U. Puisqu'un automorphisme de $\mathcal{N}$ est complètement déterminé sur V, on a $G \cong U$. Ainsi, pour étudier Aut($\mathcal{N}$), il suffit de déterminer G.

On remarque tout d'abord que G est un groupe de Lie, puisque U est un sous-groupe fermé de Aut($\mathcal{N}$), et que l'application de restriction est continue.

On obtient par ailleurs une expression matricielle de Aut($\mathcal{N}$) exprimé selon $V \oplus [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ par :

$$\text{Aut}(\mathcal{N}) \cong \{ \begin{pmatrix} Id & 0 \\ t & Id \end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & P(g) \end{pmatrix} \, : \, g \in G \, , \, t \in T \}$$

où $P(g)$ désigne des éléments de $GL([\mathcal{N}, \mathcal{N}])$ dont les coefficients matriciels sont polynomiaux en ceux de g.

Focalisons-nous maintenant sur le cas des groupes et algèbres de Lie nilpotents définis par des graphes finis. On dispose d'une caractérisation de ces algèbres de Lie.

Proposition 4.8. *Soit $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie nilpotente que l'on écrit $\mathcal{N} = V \oplus [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$. Soit G le sous-groupe de $GL(V)$ formé des restrictions à V des automorphismes de $\mathcal{N}$ laissant V invariant.*
Pour toute base S de V, on note D_S le sous-groupe de $GL(V)$ formé des éléments représentés par des matrices diagonales dans la base S.
Alors, il existe une base S telle que G contient D_S si et seulement si $\mathcal{N}$ est l'algèbre de Lie (à isomorphisme près) associé à un graphe (S, E).

Démonstration :

Supposons que l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ soit donnée par un graphe fini. Alors, les applications dont les matrices dans la base associée à S sont diagonales s'étendent naturellement en automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$: le groupe D_S est bien contenu dans G.

Réciproquement, supposons que G contienne D_S. Il existe alors une base S dans laquelle les applications associées aux matrices diagonales sont dans G. Indexons cette base par S : $(v_\alpha)_{\alpha\in S}$) éléments de V. Soient $\{\lambda_s\}_{s\in S}$ des réels tels que pour $\xi,\eta,\mu,\nu \in S$, $\lambda_\xi\lambda_\eta \neq \lambda_\mu\lambda_\nu$ dès que la paire $\{\xi,\eta\}$ est différente de la paire $\{\mu,\nu\}$. Notons $d \in D_S$ l'application définie par $d(v_\alpha) = \lambda_\alpha v_\alpha$ pour tout $\alpha \in S$.

On a $d \in G$ et il existe donc $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ tel que $\tau(v_\alpha) = \lambda_\alpha v_\alpha$ pour tout $\alpha \in S$. Aussi, pour tous $\alpha, \beta \in S$, $[v_\alpha, v_\beta]$ est soit nul, soit un vecteur propre de τ avec $\lambda_\alpha\lambda_\beta$ comme valeur propre. Mais étant donné notre choix de d, ces valeurs propres sont distinctes et les vecteurs propres sont linéairement indépendants.

On pose alors E l'ensemble des arêtes dont les sommets sont dans S, défini par : $\alpha\beta \in E$ si $[v_\alpha, v_\beta] \neq 0$. On vérifie alors que $\mathcal{N}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie associée au graphe (S,E).

En effet, on passe de l'algèbre de Lie $\mathcal{N}_{(S,E)}$ définie par ce graphe à $\mathcal{N}$ via l'isomorphisme d'algèbre de Lie (en reprenant les notations (4.1) pour définir $\mathcal{N}_{(S,E)}$) :

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{N}_{(S,E)} &\to \mathcal{N}\\ u_s &\mapsto v_s\\ u_{\alpha\beta} &\mapsto [v_\alpha, v_\beta]\end{aligned}$$

□

A partir de maintenant, on suppose fixé un graphe (S,E) et on note $\mathcal{N}$ l'algèbre de lie associée.

Notons $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de Lie de G dans End(V). On rappelle que l'on a défini une relation d'ordre sur les composantes cohérentes du graphe (S,E) :

$$\Theta := \{([\alpha],[\beta]) \in [S]\times[S] \ : \ \text{les voisins de tous } \alpha \in [\alpha] \text{ sont à distance au plus 1 de tous } \beta \in [\beta]\}$$

où $[S]$ désigne l'ensemble des composantes cohérentes. Pour chaque $[\alpha] \in [S]$, notons $V_{[\alpha]}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les éléments de $[\alpha]$.

La décomposition $\oplus_{[\alpha]\in[S]} V_{[\alpha]}$ est appelée la décomposition de V suivant la partition de S en composantes cohérentes.

On dispose du résultat suivant :

Théorème 4.9. *Soit (S,E) un graphe fini, $\mathcal{N}$ l'algèbre de Lie nilpotente de rang 2 associée. Soit V un supplémentaire de $[\mathcal{N},\mathcal{N}]$ dans $\mathcal{N}$. Soit $V = \oplus_{[\alpha]\in[S]} V_{[\alpha]}$ la décomposition de V suivant la partition de S en composantes cohérentes.*
Le sous-groupe de Lie $G = \{\tau|_V \ : \ \tau \in U\}$ de $GL(V)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *la sous-algèbre de lie $\mathcal{G}$ de G dans End(V) est donnée par*

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Theta} Hom(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$$

   où les $Hom(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$ sont vus comme sous-algèbres de Lie de $End(V)$ via l'injection canonique ;

2. *les éléments de $[S]$ peuvent être arrangés sous la forme $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_k]$ de manière à ce que les $\oplus_{i\leqslant j} V_{[\alpha_i]}$ soient invariants sous l'action de $\mathcal{G}$, pour tout $j = 1, \ldots, k$;*

3. *la composante connexe de l'identité de G s'exprime comme produit*

$$\left(\prod_{\alpha\in[S]} GL^+(V_\alpha)\right).M$$

où, M est le sous-groupe nilpotent distingué connexe fermé maximal de G.

Démonstration :

On procède en plusieurs étapes. Commençons par introduire les applications élémentaires suivantes

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta} : V &\to V \\ u_\beta &\mapsto u_\alpha \\ u_\gamma &\mapsto 0 \text{ si } \gamma \neq \beta \end{aligned}$$

1ère étape : Montrons que $([\alpha],[\beta]) \in \Theta$ si et seulement si $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$ pour tout $\alpha \in [\alpha]$ et tout $\beta \in [\beta]$.

Par définition de l'algèbre de Lie, cela revient à montrer que $([\alpha],[\beta]) \in \Theta$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $I + tE_{\alpha,\beta} \in G$, pour tous $\alpha \in [\alpha], \beta \in [\beta]$. Il suffit d'ailleurs de le vérifier pour deux éléments quelconques de chaque classe de $[S]$.

$\Leftarrow$ Soit $\tau = I + tE_{\alpha,\beta} \in G$, avec $\alpha \in [\alpha]$, et $\beta \in [\beta]$. Alors $\tau(u_\gamma) = u_\gamma$ pour $\gamma \neq \beta$, et $\tau(u_\beta) = u_\alpha + tu_\beta$. Prenons $\gamma \in \overline{\Omega(\beta)}^c$.

Alors $[u_\beta, u_\gamma] = 0$. Comme $\tau \in G$, c'est la restriction d'un automorphisme de $\mathcal{N}$ et donc $[\tau(u_\beta), \tau(u_\gamma)] = 0$. C'est-à-dire $[u_\beta + tu_\alpha, u_\gamma] = 0$. Mais $\gamma \in \overline{\Omega(\beta)}^c$, donc $[u_\alpha, u_\gamma] = 0$.

Ainsi γ et α ne sont pas voisins, donc $\gamma \notin \Omega(\alpha)$. Ce qui montre que $\Omega(\alpha) \subset \overline{\Omega(\beta)}$, et donc $([\alpha],[\beta]) \in \Theta$.

$\Rightarrow$ Réciproquement, soit $([\alpha],[\beta]) \in \Theta$. Soient $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [\alpha], \beta \in [\beta]$. Considérons $I + tE_{\alpha,\beta} \in GL(V)$. On veut montrer que l'on peut étendre cet élément en un automorphisme de $\mathcal{N}$.

Posons

$$\begin{aligned} \widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}} : \mathcal{N} &\to \mathcal{N} \\ u_\gamma &\mapsto (I + tE_{\alpha,\beta})u_\gamma \\ [u_\gamma, u_\delta] &\mapsto [(I + tE_{\alpha,\beta})u_\gamma, (I + tE_{\alpha,\beta})u_\delta] \end{aligned}$$

Montrons que de cette manière, on définit un automorphisme de $\mathcal{N}$. Il suffit pour cela de vérifier que $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}$ est bien défini sur $[V, V]$.

Deux cas sont à considérer : $[u_\gamma, u_\delta] \neq 0$ et $[u_\gamma, u_\delta] = 0$.

Si $[u_\gamma, u_\delta] \neq 0$, alors γ et δ sont voisins. Si γ et δ sont différents de β, alors $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}$ agit comme l'identité. Si $\gamma = \beta$ alors $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}([u_\gamma, u_\delta]) = [u_\gamma + tu_\alpha, u_\delta] = [u_\gamma, u_\delta] + t[u_\alpha, u_\delta] \neq 0$. Alors $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}$ admet $\widetilde{I - tE_{\alpha,\beta}}$ comme inverse.

Si $[u_\gamma, u_\delta] = 0$, alors γ et δ ne sont pas voisins. Si γ et δ sont différents de β, alors $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}$ envoie $[u_\gamma, u_\delta] = 0$ sur $[u_\gamma, u_\delta] = 0$. Si $\gamma = \beta$, alors $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}([u_\gamma, u_\delta]) = [u_\gamma + tu_\alpha, u_\delta] = t[u_\alpha, u_\delta]$.

Mais $\Omega(\alpha) \subset \overline{\Omega(\beta)}$, donc les voisins de α sont voisins de β ou β. Et comme δ n'est pas voisin de β, cela implique que α et δ ne sont pas voisins, i.e. $[u_\alpha, u_\delta] = 0$.

Ainsi, $\widetilde{I + tE_{\alpha,\beta}}$ préserve bien $[V, V]$ de manière bijective, tout en respectant les crochets. On a donc trouvé un automorphisme de $\mathcal{N}$ tel que sa restriction à V soit $I + tE_{\alpha,\beta}$, i.e. $I + tE_{\alpha,\beta} \in G$.

2ème étape : Montrons que pour tous $\alpha, \beta \in S$, si $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$ alors $\mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]}) \subset \mathcal{G}$ vu comme sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ via l'injection canonique.

D'après la proposition 1.2 et la première étape de cette démonstration : s'il existe $\alpha, \beta \in S$ tels que $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$, alors $([\alpha], [\beta]) \in \Theta$ et donc pour tous $\alpha' \in [\alpha], \beta' \in [\beta]$ on a $E_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{G}$. Donc, on a bien $\mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]}) \subset \mathcal{G}$ comme sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ (on vérifie que les applications élémentaires de $\mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$ restent dans $\mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$ par crochet).

3ème étape : Montrons que $\mathcal{G} = \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$

L'inclusion $\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]}) \subset \mathcal{G}$ découle des étapes précédentes. Pour ce qui est de l'inclusion réciproque, prenons $X \in \mathcal{G}$.

Alors $X = X_0 + \sum_{\alpha,\beta\in S, \alpha\neq\beta} \lambda_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta}$, où $\lambda_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ et $X_0 = \sum_{\alpha\in S} \lambda_{\alpha,\alpha} E_{\alpha,\alpha}$ appartient à l'espace $\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Theta} \mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$ (car $([\alpha], [\alpha]) \in \Theta$, pour tout $\alpha \in S$).

Soient $\alpha, \beta \in S$ tels que $\lambda_{\alpha,\beta} \neq 0$. Comme $\mathcal{G}$ contient les applications qui s'expriment diagonalement dans la base S, il s'ensuit que $[E_{\alpha,\alpha}, [E_{\beta,\beta}, X]] = \lambda_{\beta,\alpha} E_{\beta,\alpha} + \lambda_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$. Mais on a aussi $[E_{\beta,\beta}, \lambda_{\beta,\alpha} E_{\beta,\alpha} + \lambda_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta}] = \lambda_{\beta,\alpha} E_{\beta,\alpha} - \lambda_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$.

Ainsi $\lambda_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$ et puisque $\lambda_{\alpha,\beta} \neq 0$, on obtient que $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$. Ce qui démontre la seconde inclusion.

4ème étape : Montrons que l'on peut arranger les éléments de $[S]$ de manière à ce que les espaces $\oplus_{i\leqslant j} V_{[\alpha_i]}$ soient invariants sous l'action de $\mathcal{G}$, pour tout $j = 1, \ldots, k$.

Pour cela, il suffit de considérer l'ordre partiel défini par Θ. On écrit les éléments de $[S]$, $\{[\alpha_1], \ldots, [\alpha_k]\}$ de sorte que pour $i = 1, \ldots, k$, $[\alpha_i]$ est un élément minimal de $\{[\alpha_i], \ldots, [\alpha_k]\}$. Alors, pour $j = 1, \ldots, k$, $\oplus_{i\leqslant j} V_{[\alpha_i]}$ est invariant sous l'action de $\mathcal{G}$. En effet, soient $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{G}$ et $u_\gamma \in \oplus_{i\leqslant j} V_{[\alpha_i]}$ pour un certain $j \in \{1, \ldots\}$. Le couple $([\alpha], [\beta]) \in \Theta$ donc α est plus petit que β pour l'ordre Θ et ainsi, ou bien $E_{\alpha,\beta}(u_\gamma) = 0$, ou bien $E_{\alpha,\beta}(u_\gamma) = u_\alpha$. Dans tous les cas $E_{\alpha,\beta}(u_\gamma)$ appartient à l'espace $\oplus_{i\leqslant j} V_{[\alpha_i]}$. Ce qui démontre la stabilité.

5ème étape : Conclusion.

Notons $\mathcal{M} = \oplus_{([\alpha],[\beta])\in\Theta, [\alpha]\neq[\beta]} \mathrm{Hom}(V_{[\beta]}, V_{[\alpha]})$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$. Le calcul nous montre que c'est un idéal de $\mathcal{G}$. Soit M le sous-groupe de Lie de G correspondant à $\mathcal{M}$. Alors la composante connexe de l'identité de G est donnée par $(\prod_{\alpha\in[S]} GL^+(V_\alpha)).M$.

$\square$

Remarque 4.10. *Matriciellement on obtient l'expression :*

$$\mathcal{G} \hookrightarrow \begin{pmatrix} \mathsf{Hom}(V_{[\alpha_1]}, V_{[\alpha_1]}) & \mathsf{Hom}(V_{[\alpha_2]}, V_{[\alpha_1]}) & \dots & \mathsf{Hom}(V_{[\alpha_k]}, V_{[\alpha_1]}) \\ 0 & \mathsf{Hom}(V_{[\alpha_2]}, V_{[\alpha_2]}) & \dots & \mathsf{Hom}(V_{[\alpha_k]}, V_{[\alpha_2]}) \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathsf{Hom}(V_{[\alpha_k]}, V_{[\alpha_k]}) \end{pmatrix}$$

où certains $Hom(V_{[\alpha_i]}, V_{[\alpha_j]})$ *peuvent ne pas apparaître dans* $\mathcal{G}$.

Remarque 4.11. *Il nous arrive de considérer dans la suite le sous-groupe de* $Aut(\mathcal{N})$ *donné par* $T \rtimes L$ *où* $L \sim \prod_{[\alpha]\in[S]} SL(V_{[\alpha]})$. *Ceci pour simplifier les calculs et parce qu'alors, l'action de* L *sur* T *est stable par transposée, ce que nous utilisons dans la démonstration du Théorème 4.14.*

On souhaite étudier les actions par automorphismes sur la nilvariété $X = N/N_{\mathbb{Z}}$. Aussi, on se restreint à l'étude de l'action de $\mathrm{Aut}_{N_{\mathbb{Z}}}(N)$ qui n'est rien d'autre que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m) \rtimes (G \cap GL_n(\mathbb{Z}))$ où n désigne le nombre de sommets, et m le nombre d'arêtes.

En effet, l'action de $\mathrm{Aut}(N)$ sur N est donnée de la manière suivante. Pour tout $(v, w) \in N = V \oplus [V, V]$, et pour tout $(t, g) \in \mathrm{Aut}(N) = T \rtimes G$, on a

$$(t, g).(v, w) = (g(v), P(g)(w) + t \circ g(v)),$$

où $P(g)$ est l'élément de $GL([V, V])$ donné par g. Ainsi, pour fixer $N_{\mathbb{Z}}$ on doit avoir dans un premier temps $g \in G \cap GL_n(\mathbb{Z})$, puis $t \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m)$. Ainsi $\mathrm{Aut}_{N_{\mathbb{Z}}}(N) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m) \rtimes (G \cap GL_n(\mathbb{Z}))$, et l'inclusion réciproque est aussi vérifiée.

4.3 Étude de la propriété (T) relative à l'espace

4.3.1 Deux critères de rigidité

On garde les mêmes notations que précédemment. On se propose de commencer par démontrer le résultat suivant qui permet de se ramener à l'étude d'actions sur des tores :

Théorème 4.12. *Soit* N *groupe de Lie nilpotent simplement connexe associé à un graphe fini* (S, E).
Soit $N_{\mathbb{Z}}$ *un réseau, et notons* $(X, \mu) = (N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ *la nilvariété associée.*
Notons $X_1 = (N/[N, N])/(N_{\mathbb{Z}}/[N_{\mathbb{Z}}, N_{\mathbb{Z}}])$ *le tore maximal associé à* X *et* $X_2 = [N, N]/[N_{\mathbb{Z}}, N_{\mathbb{Z}}]$, *espaces de probabilité standards.*
Soit Γ *un sous-groupe de* $Aut_{N_{\mathbb{Z}}}(N)$.
On dispose d'une action naturelle de Γ *sur* (X, μ), (X_1, μ_1) *et* (X_2, μ_2).
Supposons que les actions induites de Γ *sur* X_1 *et* X_2 *aient la propriété (T) relative à l'espace, alors l'action de* Γ *sur* X *a aussi la propriété (T) relative à l'espace.*

Démonstration du Théorème 4.12 :
Commençons par rappeler que l'on identifie N à $\mathcal{N}$.

On procède par l'absurde, et on suppose que l'action de Γ sur (X, μ) n'ait pas la propriété (T) relative à l'espace.

D'après le Théorème 2.32, on peut trouver une mesure de probabilité $\overline{\Gamma}^{Zar}$-invariante, $\xi \in \mathbb{P}(\mathcal{N})$. Ainsi, $\overline{\Gamma}^{Zar}$ admet un sous-groupe distingué cocompact H laissant chaque point du support de ξ fixe ([Sha99], Théorème 3.11). En particulier $\Gamma_0 = \Gamma \cap H$ est un sous-groupe distingué de Γ d'indice fini, qui fixe chaque point du support de ξ.

Prenons $\overline{Y}$ dans ce support. On dispose alors d'une droite $\mathbb{R}Y \subset \mathcal{N}$ fixée par Γ_0. On distingue alors deux cas :

1er cas : $Y \in [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$
Rappelons que l'on a l'équivalence suivante :

$$\begin{gathered}\Gamma \curvearrowright (X_2, \mu_2) \text{ a la propriété (T) relative à l'espace} \\ \text{ssi } \Gamma_0 \text{ ne préserve pas de mesure de probabilité sur } \mathbb{P}([\mathcal{N}, \mathcal{N}]).\end{gathered}$$

Cependant, $\Gamma_0.\mathbb{R}Y = \mathbb{R}Y$. On prend alors la mesure de Dirac sur la droite associée dans $\mathbb{P}([\mathcal{N}, \mathcal{N}])$.

On obtient alors une mesure de probabilité Γ_0-invariante dans $\mathbb{P}([\mathcal{N}, \mathcal{N}])$. D'après ce qui précède, ceci nous dit que $\Gamma \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace, ce qui n'est pas possible.

2ème cas : $Y \notin [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$
Notons $q : \mathcal{N} \to \mathcal{N}/[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ l'application de projection. L'image $q(Y) = \tilde{Y}$ est non nul. Puisque $\mathcal{N}/[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ reste un espace vectoriel, on procède de même qu'à l'étape précédente pour arriver à une contradiction.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. L'action $\Gamma \curvearrowright X$ a donc bien la propriété (T) relative à l'espace.

□

Ce théorème soulève la question suivante.

Question 4.13. *Soit N un groupe de Lie nilpotent de rang n. Notons $C^{k+1}(N) = [N, C^k(N)]$ la suite centrale descendante de N où $k \geqslant 1$ et $C^1(N) = N$. Soit Λ un réseau de N. Soit Γ un sous-groupe dénombrable de $Aut(N)$ stabilisant Λ.*
Si les actions induites $\Gamma \curvearrowright ((C^k(N)/C^{k+1}(N))/(C^k(\Lambda)/C^{k+1}(N)), \mu_k)$ ont la propriété (T) relative à l'espace, pour $k = 1, \ldots, n$, est-ce que l'action $\Gamma \curvearrowright (N/\Lambda, \mu)$ a nécessairement la propriété (T) relative à l'espace ?

Si tel était le cas, on pourrait se ramener simplement à l'étude des actions sur des tores.

Donnons maintenant un critère permettant de simplifier et préciser le Théorème 2.32 dans le cadre d'actions par automorphismes sur des nilvariétés définies par des graphes finis.

Précisons à nouveau les notations. Soit (S, E) un graphe fini. Soit $\mathcal{N}$ l'algèbre de Lie nilpotente associée à (S, E). Soit N le groupe de Lie nilpotent simplement connexe associé et $N/N_{\mathbb{Z}}$ la nilvariété correspondante.

Notons $\mathcal{N} = V \oplus [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$, où V est un supplémentaire de $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ dans $\mathcal{N}$ et rappelons qu'avec les notations de la section 4.2.2. on a $T \cong \mathrm{Hom}(V, [\mathcal{N}, \mathcal{N}])$ et $L \cong \prod_{[\alpha] \in [S]} SL(V_{[\alpha]})$.

Remarquons que $L \cong \prod_{[\alpha]\in[S]} SL(V_{[\alpha]})$ n'a pas de morphisme non trivial vers $\mathbb{R}^*$, pas plus qu'il n'a de sous-groupe distingué cocompact non trivial.

Rappelons aussi que $T \rtimes L$ agit sur N identifié à $\mathcal{N}$ par :

$$(t,g).(Y_1,Y_2) = (g(Y_1), P(g)(Y_2) + t(g(Y_1))) \quad (*)$$

pour tout $(t,g) \in T \rtimes L$ et tout $(Y_1,Y_2)\mathcal{N}$ suivant la décomposition en somme directe $V \oplus [\mathcal{N},\mathcal{N}]$.

Théorème 4.14. *Soit* Γ *un sous-groupe dénombrable de* $T \rtimes L \subset Aut(N)$ *stabilisant* $N_{\mathbb{Z}}$*. Supposons que* Γ *soit Zariski-dense dans* $T \rtimes L$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action $\Gamma \curvearrowright (N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ *a la propriété (T) relative à l'espace, où* μ *est la mesure de probabilité* N*-invariante sur* $N/N_{\mathbb{Z}}$*,*

(ii) l'action linéaire de Γ *sur* $[\mathcal{N},\mathcal{N}]$ *n'a pas de point fixe, où* $\mathcal{N}$ *désigne l'algèbre de Lie de* N*.*

Démonstration :

On procède par contraposée pour démontrer ce théorème. On démontre l'équivalence suivante :

(i') Γ fixe un vecteur non nul $Y \in [\mathcal{N},\mathcal{N}]$,

(ii') l'action de Γ sur $(N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

(i') $\Rightarrow$ (ii') : Supposons que Γ fixe un vecteur non nul $Y \in [\mathcal{N},\mathcal{N}]$.

La mesure de Dirac correspondante à l'image de Y dans $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ est alors fixée par Γ. Ainsi, $\Gamma \curvearrowright (N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace d'après le Théorème 2.32.

(ii') $\Rightarrow$ (i') : Supposons que l'action de Γ sur $(N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ n'ait pas la propriété (T) relative à l'espace. D'après le Théorème 2.32, Γ fixe une mesure de probabilité ξ sur $\mathbb{P}(\mathcal{N})$. Le stabilisateur de ξ dans $\overline{\Gamma}^{\mathrm{Zar}} = T \rtimes L$ est un groupe algèbrique, et contient un sous-groupe distingué cocompact H qui fixe chaque point du support de ξ, supp(ξ) ([Sha99], Théorème 3.11).

Prenons $Y \in \mathcal{N}$ tel que son image dans $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ appartienne à supp(ξ), et écrivons $Y = (Y_1, Y_2)$ avec $Y_1 \in V$, $Y_2 \in [\mathcal{N},\mathcal{N}]$. Alors,

$$(t,g).Y = \lambda(t,g)Y, \quad \text{pour tout } (t,g) \in H \quad (**)$$

où $\lambda : H \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme. Nous affirmons que $Y_1 = 0$.

En effet, commençons par rappeler que suivant la décomposition $V = \bigoplus_{[\alpha]\in[S]} V_{[\alpha]}$, on a :

$$L = \begin{pmatrix} SL(V_{[\alpha_1]}) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & SL(V_{[\alpha_k]}) & & & \\ & & & I_{[\alpha_{k+1}]} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_{[\alpha_r]} \end{pmatrix},$$

puisque certains des $V_{[\alpha]}$ peuvent être de dimension 1.

Écrivons $Y_1 = (Y_{1,1}, \ldots, Y_{1,r})$ avec $Y_{1,i}$ la composante de Y_1 dans $V_{[\alpha_i]}$, pour $i = 1, \ldots, r$.

Commençons par supposer que $Y_{1,i} \neq 0$ pour un certain $1 \leqslant i \leqslant k$. Puisque $\mathrm{SL}(V_{[\alpha_i]})$ est simple et $H \cap \mathrm{SL}(V_{[\alpha_i]}) \neq \{e\}$, on a $\mathrm{SL}(V_{[\alpha_i]}) \subset H$. Ce qui est impossible puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ne stabilise pas de droite dans $\mathbb{R}^n$. Donc

$$Y_{1,1} = \cdots = Y_{1,k} = 0.$$

Il est à montrer que

$$Y_{1,k+1} = \cdots = Y_{1,r} = 0.$$

Par l'absurde, supposons que $Y_{1,i} \neq 0$ pour un certain $k+1 \leqslant i \leqslant r$. Alors, en nous focalisant sur la i-ème composante dans l'équation $(**)$, on voit que $\lambda : H \to \mathbb{R}^*$ est trivial. Il suit de $(*)$ et $(**)$ que :

$$Y_2 = P(g)Y_2 + tY_1, \quad \text{pour tout } (t,g) \in T \rtimes L.$$

C'est une équation polynomiale en les coefficients matriciels de t et g. Puisque cette équation est vérifiée pour H, elle l'est aussi pour son adhérence de Zariski que l'on notera Z.

$$Y_2 = P(g)Y_2 + tY_1, \quad \text{pour tout } (t,g) \in Z \quad (***).$$

Remarquons que Z est un sous-groupe distingué cocompact de $T \rtimes L$. Montrons que $Z = T \rtimes L$. Une fois cette égalité démontrée, il nous suffira d'appliquer $(***)$ à $g = e$ pour obtenir

$$Y_2 = Y_2 + tY_1, \quad \text{pour tout } t \in T,$$

et ainsi, on aura $Y_1 = 0$.

La projection de Z sur L est L, puisque L n'admet pas de sous-groupe distingué cocompact non trivial. Ainsi, il suffit de démontrer que $T \subset Z$.

Pour cela, considérons le morphisme de groupe $\varphi : T/T \cap Z \to TZ/Z$. Puisque $TZ = T \rtimes L$, et puisque $T/T \cap Z$ et $(T \rtimes L)/Z$ sont des groupes localement compacts σ-compacts, l'isomorphisme de groupes φ, qui est continu, est un homéomorphisme.

Le groupe $T/T \cap Z \cong TZ/Z$ est compact puisque Z est cocompact dans TZ. On en déduit que $T \cap Z$ est un sous-groupe distingué cocompact Zariski-fermé de $T = \mathrm{Hom}(V, [\mathcal{N}, \mathcal{N}])$ qui lui-même est isomorphe à un certain $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Ainsi, $T \subset Z$.
Nous avons donc bien démontré que $Y_1 = 0$.

Nous affirmons maintenant que Y_2 est fixé par Γ. Puisque $Y_2 \in [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$, ceci permet d'achever la démonstration.

Notons $p_2 : T \rtimes L \to L$ la projection canonique. Rappelons que L n'admet pas de morphisme non-trivial à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et qu'il n'a pas de sous-groupe distingué cocompact non-trivial. Il s'ensuit que $p_2(H) = L$. Ceci démontre que Y_2 est fixé par L et donc par Γ.

□

4.3.2 Quelques exemples

Groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg $H_{\mathbb{R}}$ s'obtient à partir du graphe à 2 sommets et une arête. Son groupe d'automorphisme fixant $H_{\mathbb{Z}}$ est donné, à indice fini près, par $T \rtimes L \subset \mathrm{Aut}_{H_{\mathbb{Z}}}(H_{\mathbb{R}})$, voir [BH11], où

$$T \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}), \quad L \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

et pour $t \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}), g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, l'action de $(t, g) \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbb{R}})$ sur $H_{\mathbb{R}}$ est donnée par :

$$(t, g).(x, y, z) = (g(x, y), z + t(x, y)), \quad \text{pour } (x, y, z) \in H_{\mathbb{R}}.$$

On remarque que tout élément g de $T \rtimes L$ fixe les points images du centre de $H_{\mathbb{R}}$ dans $H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$. On déduit donc du Théorème 4.14 le résultat suivant :

Proposition 4.15. *Pour tout sous-groupe Γ de $Aut_{H_{\mathbb{Z}}}(H_{\mathbb{R}})$, l'action $\Gamma \curvearrowright (H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}, \mu)$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.*

En particulier, toute sous-relation d'équivalence de la relation d'équivalence induite par l'action de $\mathrm{Aut}_{H_{\mathbb{Z}}}(H_{\mathbb{R}})$ sur $H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$ n'a pas la propriété (T) relative à l'espace.

Graphes complets à $n \geqslant 3$ sommets

En ce qui concerne les graphes complets, on dispose du résultat suivant :

Proposition 4.16. *Soit (S, E) un graphe complet à $n \geqslant 3$ sommets. Soit N le groupe de Lie nilpotent associé, et notons $(X, \mu) = (N/N_{\mathbb{Z}}, \mu)$ la nilvariété associée.*
Alors, l'action de $Aut_{N_{\mathbb{Z}}}(N)$ sur (X, μ) a la propriété (T) relative à l'espace.

Démonstration :

On applique le Théorème 4.12 pour démontrer ce résultat.

Soit (S, E) un graphe complet à $n \geqslant 3$ sommets. Le nombre d'arête est égal à $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Notons N le groupe nilpotent et X la nilvariété associée à ce graphe. Les automorphismes de la nilvariété sont de la forme

$$\mathrm{Aut}_{N_{\mathbb{Z}}}(N) = \{\begin{pmatrix} Id & 0 \\ t & Id \end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \varphi(g) \end{pmatrix} \; : \; g \in SL_n(\mathbb{Z}) \, , \, t \in Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m)\}$$

où les coefficients de $\varphi(g) \in SL_m(\mathbb{Z})$ dépendent de manière polynomiale de ceux de g. En fait, $\varphi : SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_m(\mathbb{Z})$ est un morphisme de groupe injectif qui vérifie l'équation :

$$\varphi(g)_{[v_i,v_j],[v_k,v_l]} = g_{v_k,v_i} g_{v_l,v_j} - g_{v_l,v_i} g_{v_k,v_j}.$$

où les $v_i, i = 1, \ldots, n$ désignent des vecteurs de base de V dans la décomposition $N = V \oplus [N, N]$. On a donc $\varphi(SL_n(\mathbb{Z})) \sim SL_n(\mathbb{Z})$.

On sait déjà que l'action de $SL_n(\mathbb{Z})$ sur le tore $\mathbb{T}^n$ a la propriété (T) relative à l'espace. Aussi, pour avoir pour avoir propriété (T) relative à l'espace de $\mathrm{Aut}_{N_{\mathbb{Z}}}(N)$ sur (X, μ), il suffit de montrer que l'action naturelle de $\varphi(SL_n(\mathbb{Z}))$ sur $\mathbb{T}^m$ a la propriété (T) relative à l'espace, ceci d'après le Théorème 4.12.

Pour montrer que l'action de $\varphi(SL_n(\mathbb{Z}))$ sur le tore $\mathbb{T}^m$ a la propriété (T) relative à l'espace, il suffit de vérifier que $\varphi(SL_n(\mathbb{Z}))$ agit sur $\mathbb{R}^m$ sans point fixe.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un point fixe non trivial $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Il existe un $i \in \{1, \ldots m\}$ tel que x_i est non nul. On obtient alors pour tout $g \in SL_n(\mathbb{Z})$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi(g)_{[v_i,v_j],[v_k,v_l]} x_j = \sum_{j=1}^{n} (g_{k,i}g_{l,j} - g_{l,i}g_{k,j}) x_j$$

On en déduit l'existence d'un polynôme P de degré 2 en les coefficients de $g \in SL_n(\mathbb{Z})$, nul sur $SL_n(\mathbb{Z})$. Mais $SL_n(\mathbb{Z})$ est Zariski dense dans $SL_n(\mathbb{R})$. On aurait l'inclusion d'idéaux suivante

$$(P) \subset (det - 1)$$

ce qui n'est pas possible. Ainsi $\varphi(SL_n(\mathbb{Z}))$ agit sur $\mathbb{R}^m$ sans point fixe.

Finalement, l'action de $\mathrm{Aut}_{N_{\mathbb{Z}}}(N)$ sur (X, λ) a la propriété (T) relative à l'espace.

□

Remarque 4.17. *La démonstration de la proposition précédente reste bien évidemment valable si l'on prend un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Z})$ Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$.*

Les étoiles

Soit N le groupe de Lie nilpotent associé à un graphe "étoilé"; on désigne ainsi tout graphe donné par un sommet central lié à n autres sommets, $n \geqslant 2$, sans arête supplémentaire. Considérons le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(N)$ suivant :

$$T \rtimes L \cong \{ \begin{pmatrix} Id & 0 \\ t & Id \end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(g) \end{pmatrix} : g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), t \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n) \}$$

où $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ agit sur $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$.

De manière évidente, il n'y a pas de point fixe dans $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$. Ainsi, d'après le Théorème 4.14 :

Proposition 4.18. *L'action de $(T \rtimes L)_{\mathbb{Z}}$ sur $N/N_{\mathbb{Z}}$ a la propriété (T) relative à l'espace.*

Bibliographie

[BdlHV08] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[BG81] S. I. Bezuglyĭ and V. Ya. Golodets. Hyperfinite and II_1 actions for nonamenable groups. *J. Funct. Anal.*, 40(1) :30–44, 1981.

[BG15] B. Bekka and Y. Guivarc'h. On the spectral theory of groups of affine transformations of compact nilmanifolds. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 48(3) :607–645, 2015.

[BH78] A. Borel and G. Harder. Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields. *J. Reine Angew. Math.*, 298 :53–64, 1978.

[BH11] B. Bekka and J.-R. Heu. Random products of automorphisms of Heisenberg nilmanifolds and Weil's representation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(5) :1277–1286, 2011.

[Bou72] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*. Hermann, Paris, 1972. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349.

[Bou15] M. Bouljihad. Rigidity for group actions on homogeneous spaces by affine transformations. *to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems, arxiv :1502.04339*, 2015.

[Bou16] M. Bouljihad. Existence of rigid actions for finitely-generated non-amenable linear groups. *to appear*, 2016.

[Bur91] M. Burger. Kazhdan constants for $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z})$. *J. Reine Angew. Math.*, 413 :36–67, 1991.

[CJ85] A. Connes and V. Jones. Property (T) for von Neumann algebras. *Bull. London Math. Soc.*, 17(1) :57–62, 1985.

[Con80a] A. Connes. A factor of type II_1 with countable fundamental group. *J. Operator Theory*, 4(1) :151–153, 1980.

[Con80b] A. Connes. A factor of type II_1 with countable fundamental group. *J. Operator Theory*, 4(1) :151–153, 1980.

[CT11] Y. Cornulier and R. Tessera. A characterization of relative Kazhdan property (T) for semidirect products with abelian groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(3) :793–805, 2011.

[dC06] Y. de Cornulier. Relative Kazhdan property. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(2) :301–333, 2006.

[dlH04] P. de la Harpe. Mesures finiment additives et paradoxes. In *Autour du centenaire Lebesgue*, volume 18 of *Panor. Synthèses*, pages 39–61. Soc. Math. France, Paris, 2004.

[DM05] S. G. Dani and M. G. Mainkar. Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(6) :2235–2251, 2005.

[Dye59] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformation. I. *Amer. J. Math.*, 81 :119–159, 1959.

[Dye63] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformations. II. *Amer. J. Math.*, 85 :551–576, 1963.

[Eps08] I. Epstein. Some results on orbit inequivalent actions of non-amenable groups. page 55, 2008. Thesis (Ph.D.)–University of California, Los Angeles.

[Eym72] P. Eymard. *Moyennes invariantes et représentations unitaires*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 300. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Fer06] T. Fernós. Relative property (T) and linear groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(6) :1767–1804, 2006.

[FM77a] J. Feldman and C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2) :289–324, 1977.

[FM77b] J. Feldman and C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2) :325–359, 1977.

[Fur76] H. Furstenberg. A note on Borel's density theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 55(1) :209–212, 1976.

[Gab10] D. Gaboriau. Orbit equivalence and measured group theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, pages 1501–1527. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[Gab11] D. Gaboriau. Free product actions with relative property (T) and trivial outer automorphism groups. *J. Funct. Anal.*, 260(2) :414–427, 2011.

[GL09] D. Gaboriau and R. Lyons. A measurable-group-theoretic solution to von Neumann's problem. *Invent. Math.*, 177(3) :533–540, 2009.

[GP05] D. Gaboriau and S. Popa. An uncountable family of nonorbit equivalent actions of $\mathbb{F}_n$. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :547–559, 2005.

[HM79] R. E. Howe and C. C. Moore. Asymptotic properties of unitary representations. *J. Funct. Anal.*, 32(1) :72–96, 1979.

[Hou09] C. Houdayer. Construction of type II_1 factors with prescribed countable fundamental group. *J. Reine Angew. Math.*, 634 :169–207, 2009.

[HPV13] C. Houdayer, S. Popa, and S. Vaes. A class of groups for which every action is W^*-superrigid. *Groups Geom. Dyn.*, 7(3) :577–590, 2013.

[Hum75] J. E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Ioa10] A. Ioana. Relative property (T) for the subequivalence relations induced by the action of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on $\mathbb{T}^2$. *Adv. Math.*, 224(4) :1589–1617, 2010.

[Ioa11a] A. Ioana. Orbit inequivalent actions for groups containing a copy of $\mathbb{F}_2$. *Invent. Math.*, 185(1) :55–73, 2011.

[Ioa11b] A. Ioana. W^*-superrigidity for Bernoulli actions of property (T) groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(4) :1175–1226, 2011.

[Ioa14] A. Ioana. Strong ergodicity, property (t), and orbit equivalence rigidity for translation actions. *arXiv :1406.6628*, 2014.

[IS13] A. Ioana and Y. Shalom. Rigidity for equivalence relations on homogeneous spaces. *Groups Geom. Dyn.*, 7(2) :403–417, 2013.

[IV12] A. Ioana and S. Vaes. Rigid actions need not be strongly ergodic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(9) :3283–3288, 2012.

[Jon85] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1) :103–111, 1985.

[Kaz67] D. A. Kazdhan. Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Functional Analysis and its Application* ***1***, 1 :63–65, 1967.

[KM79] M. I. Kargapolov and Ju. I. Merzljakov. *Fundamentals of the theory of groups*, volume 62 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. Translated from the second Russian edition by Robert G. Burns.

[Mar73] G. A. Margulis. Explicit constructions of expanders. *Problemy Peredači Informacii*, 9(4) :71–80, 1973.

[Mar80] G. A. Margulis. Some remarks on invariant means. *Monatsh. Math.*, 90(3) :233–235, 1980.

[Mar82] G. A. Margulis. Finitely-additive invariant measures on Euclidean spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(3-4) :383–396, 1982.

[Mur02] J. D. Murray. *Mathematical biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.

[MVN36] F. J. Murray and J. Von Neumann. On rings of operators. *Ann. of Math. (2)*, 37(1) :116–229, 1936.

[MvN43] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44 :716–808, 1943.

[Ol′80] A. Ju. Ol′šanskiĭ. On the question of the existence of an invariant mean on a group. *Uspekhi Mat. Nauk*, 35(4(214)) :199–200, 1980.

[OW80] D. S. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 2(1) :161–164, 1980.

[Pop] S. Popa. Some open problems on II_1 factors of group actions. http ://www.math.ucla.edu/~popa/fields07.pdf.

[Pop06a] S. Popa. On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants. *Ann. of Math. (2)*, 163(3) :809–899, 2006.

[Pop06b] S. Popa. Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups. II. *Invent. Math.*, 165(2) :409–451, 2006.

[Pop07] S. Popa. Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups. *Invent. Math.*, 170(2) :243–295, 2007.

[PV10a] S. Popa and S. Vaes. Actions of $\mathbb{F}_\infty$ whose II_1 factors and orbit equivalence relations have prescribed fundamental group. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(2) :383–403, 2010.

[PV10b] S. Popa and S. Vaes. Group measure space decomposition of II_1 factors and W^*-superrigidity. *Invent. Math.*, 182(2) :371–417, 2010.

[Rud80] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[Sak98] S. Sakai. *C^*-algebras and W^*-algebras*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Reprint of the 1971 edition.

[Sch81] K. Schmidt. Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(2) :223–236, 1981.

[Sha99] Y. Shalom. Invariant measures for algebraic actions, Zariski dense subgroups and Kazhdan's property (T). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(8) :3387–3412, 1999.

[Sil08] C. E. Silva. *Invitation to ergodic theory*, volume 42 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Sin55] I. M. Singer. Automorphisms of finite factors. *Amer. J. Math.*, 77 :117–133, 1955.

[Tak02] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. I*, volume 124 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Reprint of the first (1979) edition, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5.

[Tak03a] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. II*, volume 125 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6.

[Tak03b] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. III*, volume 127 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 8.

[Tit72] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20 :250–270, 1972.

[Val05] A. Valette. Group pairs with property (T), from arithmetic lattices. *Geom. Dedicata*, 112 :183–196, 2005.

[vN29] J. von Neumann. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fund. Math.*, 13(1) :73–116, 1929.

[Zim84] R. J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

Abstract

The purpose of this thesis is to study the Kazhdan's property (T) relative to the space (also called rigidity in the sense of Popa) of probability measure preserving actions of countable groups on standard probability measure spaces (p.m.p.).
This last decade, some problems in the theory of ergodic theory and von Neumann algebras were solved using the property (T) relative to the space. However, the theoretical aspects of its study remain largely mysterious.
An open question asks which groups admit a p.m.p. free and ergodic action which has the property (T) relative to the space. We show in this dissertation that every finitely-generated non-amenable linear groups over a field of characteristic zero admits a p.m.p. ergodic action which has this property. If this group has trivial solvable radical, we prove that these actions can be chosen to be free.
In order to obtain these results, we start by investigating natural questions concerning the stability of the property (T) relative to the space through standard constructions : products, restriction, co-induction, induction. Then, we give a criterion for the property (T) relative to the space to hold in the case of p.m.p. actions on homogeneous space G/Λ of a p-adic Lie group for a countable subgroup Γ of affine transformations of G stabilizing the lattice Λ. The action of Γ on G/Λ has the property (T) relative to the space if and only if the induced action of Γ on the projective space of the Lie algebra of G admits no invariant probability measure.
Moreover, we study the case of actions by automorphims on nilvarietes defined by finite graphs.

Keywords: Property (T) relative to the space, Ergodic theory of group actions, von Neumann algebras.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de la propriété (T) de Kazhdan relative à l'espace (ou rigidité au sens de Popa) d'actions de groupes dénombrables sur des espaces de probabilité standards préservant une mesure de probabilité (p.m.p.).
Ces dix dernières années, la propriété (T) relative à l'espace a permis de résoudre de nombreux problèmes dans le cadre de la théorie ergodique des actions de groupes et des algèbres de von Neumann. Néanmoins, certains aspects théoriques de cette notion restent largement mystérieux.
Une question encore ouverte consiste à déterminer les groupes admettant une action libre ergodique p.m.p. ayant la propriété (T) relative à l'espace. Nous montrons dans cette thèse que les groupes de type fini non-moyennables linéaires sur un corps de caractéristique nulle admettent une action ergodique p.m.p. possédant cette propriété. Si le groupe est à radical résoluble trivial, l'action que nous construisons est aussi libre.
Pour ce faire, nous commençons par étudier la stabilité de la propriété (T) relative à l'espace vis-à-vis de différentes constructions d'actions p.m.p. : produit, restriction, co-induction, induction. Puis, nous donnons une caractérisation de la propriété (T) relative à l'espace dans le cas d'actions p.m.p. sur un espace homogène G/Λ de groupe de Lie p-adique d'un sous-groupe dénombrable Γ du groupe des transformations affines de G stabilisant le réseau Λ. L'action de Γ sur G/Λ a la propriété (T) relative à l'espace si et seulement s'il n'existe pas de mesure de probabilité Γ-invariante sur l'espace projectif de l'algèbre de Lie de G.
Par ailleurs, nous étudions le cas d'actions de groupes par automorphismes sur des nilvariétés définies par des graphes finis.

Mots-clés: Propriété (T) relative à l'espace, Théorie ergodique des actions de groupes, Algèbres de von Neumann.